Specific Research Reports of the National Institute
of Industrial Safety, NIIS-SRR-NO.21 (2000)
UDC 539.42:519.67:519.245

3. 構造信頼性解析用非線形最適化アルゴリズムの改良*

佐々木哲也**

3. Improvement of a Non-Linear Optimization Algorithm for Structural Reliability Analyses

by Tetsuya SASAKI**

Abstract: Recently, the structures are becoming more complex and performance requirements are becoming more ambitious. On the other hand, the requirements for safety and cost reduction are also becoming more demanding. To balance these inconsistent requirements, the need for a structural reliability analysis, which employs probabilistic information of loads, material properties and geometry of components, has been growing. In general, a structural reliability analysis requires the failure probability of the structure which is defined by the multi-dimensional integral of the joint probability density function of basic probabilistic variables. However, it is usually difficult to directly compute this multi-dimensional integral because of the arbitrary nature of the integration domain and typically high dimension of the problem. To overcome these difficulties, indirect methods such as the first-order reliability method (FORM) or the second-order reliability method (SORM) has been proposed as well as the Monte Carlo simulation methods.

An important step of FORM/SORM is to find a design point, the point on the limit-state surface of minimum distance to the origin in the standard normal space, and the total computation time of FORM/SORM mainly depends on this procedure. To find a design point is also useful for the Monte Carlo simulation method because once a design point is found, the failure probability can be efficiently computed using the importance sampling technique weighted around the design point. Basically, any constrained non-linear optimization algorithms may be applied to find a design point and a variety of algorithms have been applied or proposed to solve structural reliability problems. However, recent development of the finite element reliability analysis requires more efficient algorithms because it takes much more time to calculate the inexplicit limit-state function by the finite element method.

In this paper, some modifications are made to an existing constrained non-linear optimization algorithm in order to improve the efficiency to find a design point without losing generality, robustness and capacity. Through numerical examples typically appearing in structural reliability analyses, the proposed algorithm is compared with existing algorithms which have been already shown to be suitable for structural reliability analyses. The comparison reveals that the proposed algorithm has not only efficiency but also superior generality, robustness and capacity.

Keywords; Structural reliability, Failure probability, Reliability index, Non-Linear optimization method, First-order reliability method, Second-order reliability method, Monte Carlo simulation, Importance sampling

---

* 平成 11 年 11 月 26 日，第 32 回安全工学研究発表会において本研究の一部を発表した。
** 機械システム安全研究部　Mechanical and System Safety Research Division

1. 緒　言

近年，産業界で使用されている機械や構造物は著しく大型化するとともに複雑化・高度化が進んでいる。このような機械・構造物にひとたび破壊事故が発生すると甚大な人的災害に結びつく危険性が高いため，強度的に十分な安全性を確保する必要がある。一方で，経済の低成長化とグローバル化に伴う企業間の競争激化等により，機械・構造物の製造や保守に関して可能な限りコストの削減が望まれるようになっている。このため，今後は機械・構造物の強度設計や定期点検間隔の設定に際して，構造信頼性解析によって破壊に対する信頼性を定量的に評価し，安全性と経済性を高度にバランスさせる必要がある。そこで，著者はこれまでにAFOSM (Advanced First-Order Second Moment) 法と重点サンプリング・モンテカルロシミュレーションを併用することによって効率的に構造物の信頼性評価を行うことが可能なコンピュータシステムを開発してきた[1)]。

ところで，実際に構造信頼性解析を行う際には，破壊条件式が陽に表示できず，有限要素解析等の数値計算が必要な場合も多い。このため，特に大規模システムの信頼性解析においては，設計点の探索に使用される制約条件付き非線形最適化アルゴリズムの計算効率が全体の計算時間に大きな影響を及ぼす。そこで，本研究ではこれまでに有効性が示されている制約条件付き非線形最適化アルゴリズムに計算効率を高めるための修正を加えた方法を提案した。そして，解析例を通して従来法と比較することにより，その有効性を検討した。

2. 構造信頼性解析の方法

2.1 破壊確率の定式化

$\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^T$ を破壊に関与する n 次元確率変数ベクトル，$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{X}$ の結合確率密度関数とするとき，破壊確率 P_f は，

$$P_f = \int \cdots \int_D f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{1}$$

で表される[2)]。ここで，積分領域 D は破壊が生じるような $\boldsymbol{X}$ の領域である。D が対象とする破壊モードの破壊条件を記述する関数 $g(\boldsymbol{x})$ を用いて，

$$D = \{\boldsymbol{x} | g(\boldsymbol{x}) \leq 0\} \tag{2}$$

のように表されるとき，$g(\boldsymbol{x})$ は限界状態関数，$g(\boldsymbol{x}) = 0$ は限界状態曲面と呼ばれる。

構造物の破壊に対する信頼性を評価するためには，式(1) の値を評価する必要があるが，式 (1) の計算を直接実行することは困難な場合が多いため，FORM (First-Order Reliability Method)，SORM (Second-Order Reliability Method) によって間接的に評価されたり，モンテカルロシミュレーションで数値的に評価される。

2.2 FORM/SORM

FORM や SORM は，限界状態曲面を単純な関数で置き換えることにより，近似的に P_f を評価する手法である。この置き換えは，無相関の標準正規確率空間 $\boldsymbol{U}$ の設計点 $\boldsymbol{u}^*$ で行われる。$\boldsymbol{u}^*$ は $\boldsymbol{U}$ 空間での限界状態曲面 $G(\boldsymbol{u}) = 0$ 上で原点までの距離が最小となるような点である。また，設計点と原点の距離 β は信頼性指標と呼ばれており，この値で構造物の信頼性を定量化することもできる。

FORM では，限界状態曲面が設計点 $\boldsymbol{u}^*$ で超平面に置き換えられる。この場合，破壊確率 P_f は

$$P_f = \Phi(-\beta) \tag{3}$$

のように近似される。ただし，$\Phi(\cdot)$ は次式で定義される標準正規確率分布関数である。

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \tag{4}$$

一方，SORM では限界状態曲面が設計点 $\boldsymbol{u}^*$ で 2 次超曲面に置き換えられる。

設計点と FORM/SORM の概念図を 2 次元の場合について **Fig. 1** に示す。

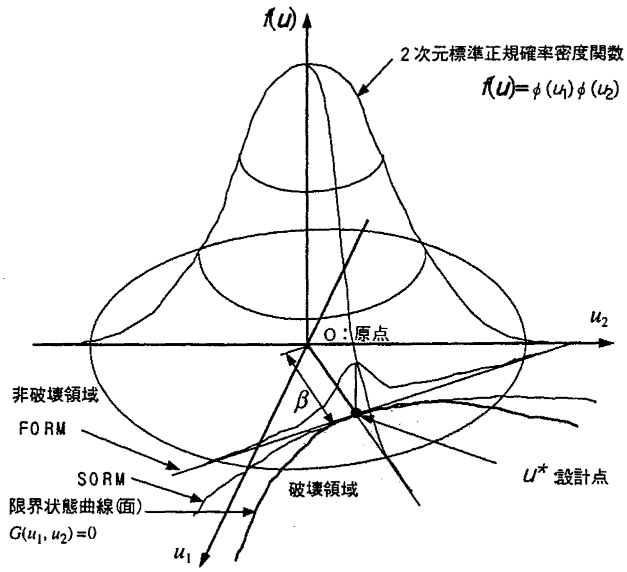

Fig. 1　Illustration of a design point and FORM/SORM.
設計点と FORM/SORM の概念図

2.3 モンテカルロ法

モンテカルロ法で式 (1) の値を評価することも可能であり，特に複数の破壊モードを有する構造システムの破壊確率評価に際して威力を発揮する。しかし，構造物の破壊確率は非常に小さいのが普通であるから，原始的サンプリングでは計算時間が掛かりすぎて実用的でなかったり，疑似乱数の周期性が問題となったりする。このため，層別サンプリングや重点サンプリング等の効率化サンプリング法が用いられているが，層別サンプリングでは階層化の方法，重点サンプリングではサンプリング関数の中心位置や分布形状が計算効率に大きな影響を及ぼすため，実際の構造信頼性解析に際しては，これらを合理的に決定するための手法が必要となる。

3. 構造信頼性解析用非線形最適化アルゴリズム

3.1 基本問題

FORM/SORM では，設計点 $\boldsymbol{u}^*$ を見いだすことが主要な問題となるが，これは次のような制約条件付き非線形最適化問題に帰着される。

$$\mathrm{P}_0 \ : F(\boldsymbol{u}) = \sqrt{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}} \rightarrow \min. \qquad \text{subject to} \quad G(\boldsymbol{u}) = 0 \tag{5}$$

ただし，$\boldsymbol{u}$, $G(\boldsymbol{u}) = 0$ はそれぞれ標準正規空間での確率変数，破壊条件式である。

一方，重点サンプリングによるモンテカルロシミュレーションでも，設計点をサンプリング関数の中心とすることにより，破壊確率が効率的に求まることが指摘されている。P_0 を解くためには，種々の制約条件付き非線形最適化アルゴリズムが適用可能である。

3.2 従来の非線形最適化アルゴリズム

ここでは，P_0 を解くために従来適用が試みられてきた制約条件付き非線形最適化アルゴリズムについて概観する。

3.2.1 ペナルティ関数 (PF) 法[3)]

ペナルティ関数 (PF; Penalty Function) 法は，次式のようにペナルティ項を付加することにより，制約条件付き最適化問題を制約条件なし問題に変換する方法である。

$$\mathrm{P}_1 \ : \ F(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{t^{(k)}}\{G(\boldsymbol{u})\}^2 \ \rightarrow \ \min. \tag{6}$$

ここで，$t^{(k)}$ は正のペナルティパラメータであり，次式で更新される。

$$t^{(k+1)} = ct^{(k)}, \quad c \in (0, 1) \tag{7}$$

制約条件なし問題 P_1 を解くためには，一般に準ニュートン法が利用される。

3.2.2 拡張ラグランジュ関数 (AL) 法[4)]

拡張ラグランジュ関数 (AL; Augmented Lagrangian) 法はペナルティ関数法とラグランジュ乗数法の長所を取り入れた手法であり，室津ら[5)]や Bourgund ら[6)]によって採用されている。

$$\mathrm{P}_2 \ : \ F(\boldsymbol{u}) + \lambda^{(k)}G(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}r^{(k)}\{G(\boldsymbol{u})\}^2 \ \rightarrow \ \min. \tag{8}$$

ここで，$\lambda^{(k)}$, $r^{(k)}$ は，それぞれラグランジュ乗数，正のペナルティパラメータであり，

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r^{(k)}G(\boldsymbol{u}^{(k)}) \tag{9}$$

$$r^{(k+1)} = cr^{(k)}, \ c > 1, \ r^{(0)} > 0 \tag{10}$$

によって更新される。

3.2.3 逐次 2 次計画 (SQP) 法[7)]

逐次 2 次計画 (SQP; Sequential Quadratic Programming) 法は，原問題を現在の点における副問題として，次式の 2 次計画問題で逐次近似していくことにより，最適化を行う方法である。

$$\mathrm{P}_3 \ : \ \boldsymbol{u}^{(k)T}\boldsymbol{d} + \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\nabla^2 L(\boldsymbol{u}^{(k)}, \ \lambda^{(k)})\boldsymbol{d} \ \rightarrow \ \min. \qquad \text{subject to} \quad G(\boldsymbol{u}^{(k)}) + \nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})^T\boldsymbol{d} = 0 \tag{11}$$

ここで，L はラグランジュ関数，$\lambda^{(k)}$ はラグランジュ乗数である。

P_3 の解とラグランジュ乗数は，次式で定義される $\boldsymbol{d}^{(k)}$ と $\lambda^{(k)}$ である。

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 L(\boldsymbol{u}^{(k)}, \lambda^{(k)}) & \nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)}) \\ \nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^{(k)} \\ \lambda^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{u}^{(k)} \\ -G(\boldsymbol{u}^{(k)}) \end{pmatrix} \tag{12}$$

しかし，ラグランジュ関数のヘッセ行列 $\nabla^2 L(\boldsymbol{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})$ を直接計算すると計算時間を要するため，近似行列 B を使用して，各ステップ毎に更新する。

逐次 2 次計画法にはいくつかの派生アルゴリズムが存在しているが，例えば， Powell によって提案された

アルゴリズム[8]では，BFGS 公式を応用した次式によって，近似ヘッセ行列 $\boldsymbol{B}$ を更新する。

$$\boldsymbol{B}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}^{(k)} - \frac{\boldsymbol{B}^{(k)}\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{B}^{(k)}}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{B}^{(k)}\boldsymbol{d}} + \frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{q}} \tag{13}$$

ただし，

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u}^{(k+1)} - \boldsymbol{u}^{(k)} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{q} = \theta\boldsymbol{y} + (1-\theta)\boldsymbol{B}^{(k)}\boldsymbol{d} \tag{15}$$

であり，

$$\boldsymbol{y} = \nabla L(\boldsymbol{u}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}) - \nabla L(\boldsymbol{u}^{(k)}, \lambda^{(k)}) \tag{16}$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y} \geq 0.2\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{B}^{(k)}\boldsymbol{d} \\ \dfrac{0.8\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{B}^{(k)}\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{B}^{(k)}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y}} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

である。

3.2.4 HL-RF 法[9),10)]

HL-RF 法は Hasofer ら[9)]によって提案されたアルゴリズムであり，Rackwitz ら[10)]によって分布形状の情報が取り入れられるように拡張された。この方法では，次式の漸化式によって，最適化点を探索する。

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \frac{\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})^T\boldsymbol{u}^{(k)} - G(\boldsymbol{u}^{(k)})}{\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})^T\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})}\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)}) \tag{18}$$

3.2.5 修正 HL-RF(MHL-RF) 法[11)]

HL-RF 法は収束が早いが，ある種の状況下では収束しないことが知られている[11)]。そこで，Liu ら[11)]は，修正 HL-RF (MHL-RF; Modified HL-RF) 法を提案した。この方法では，まず次式のメリット関数 $m(\boldsymbol{u})$ を導入する。

$$m(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{u} - \frac{\nabla G(\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{u}}{\nabla G(\boldsymbol{u})^T\nabla G(\boldsymbol{u})}\nabla G(\boldsymbol{u})\right|^2 + \frac{1}{2}cG(\boldsymbol{u})^2 \tag{19}$$

ただし，c は正の定数である。そして，探索方向ベクトル

$$\boldsymbol{d}^{(k+1)} = \frac{\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})^T\boldsymbol{u}^{(k)} - G(\boldsymbol{u}^{(k)})}{\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})^T\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)})}\nabla G(\boldsymbol{u}^{(k)}) - \boldsymbol{u}^{(k)} \tag{20}$$

に沿って，$m(\boldsymbol{u})$ が十分に減少するまで一次元探索を行うことによって新しい探索点を得る。

3.3 提案アルゴリズム

修正 HL-RF 法では一次元探索の際に $\nabla G(\boldsymbol{u})$ の計算が必要になるため，HL-RF 法に比較して計算時間が増加する恐れがある。また，式 (19) 中の c の値を何らかの方法で決めなければならないが，最適な値は事前にはわからないという問題もある。そこで，メリット関数を簡略化して，

$$m(\boldsymbol{u}) = G(\boldsymbol{u})^2 \tag{21}$$

で定義するとともに，HL-RF 法の繰返し過程で解が 2 回続けて改善されない場合にのみ，式 (20) の探索方向ベクトルと式 (21) のメリット関数を用いて最適化を行う方法を提案した。以下，この方法を単純化修正 HL-RF (SMHL-RF; Simplified MHL-RF) 法と呼ぶことにする。

4. 非線形最適化アルゴリズムの比較検討

4.1 比較の方法

本論文で提案した単純化修正 HL-RF 法の有効性について検討するために，前節で示した各種非線形最適化アルゴリズムを既に開発済みの破壊確率評価システム[1)]にインプリメントした。この評価システムでは，各ルーチンは完全にモジュール化されているため，容易に新しい最適化アルゴリズムをインプリメント可能となっている。そして，典型的な構造信頼性問題に対して各アルゴリズムを適用し，得られる解の妥当性や最適解への収束効率について検討した。

ただし，以下の解析ではペナルティ関数法における初期パラメータ $t^{(0)}$，拡張ラグランジュ法における初期パラメータ $r^{(0)}$，及び修正 HL-RF 法におけるパラメータ c は，いずれも 10^{-10} から 10^{10} まで 10 倍毎に増加させ，最も効率的に正しい最適解に収束するときの値を用いた。また，$\nabla G(\boldsymbol{u})$ は前進差分による数値解を使用した。

4.2 例題 1[12)]

まず，最も基本的な問題として S-S (Stress-Strength) モデルを考え，限界状態関数を

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_2 \tag{22}$$

とする。基本変数の統計的性質は **Table 1** で示されるように仮定する。

各最適化アルゴリズムによって，この問題を解いた結果を **Table 2** に示す。表中の $\nabla G(\boldsymbol{u})$, $G(\boldsymbol{u})$ の欄はそれぞれの関数が収束までに呼び出された回数を示している。本例題に対しては，HL-RF 法を除く全てのアルゴリズムが $\beta = 4.33$ に収束し，逐次 2 次計画法が最も $G(\boldsymbol{u})$ の計算回数が少なかった。

Table 1 Statistical properties of basic variables for example 1.
例題 1 における基本変数の統計的性質

Variable	Distribution	Mean	Std. dev.
X_1	Weibull	3.5	0.7
X_2	Normal	1.0	0.35

Table 2 Comparison of algorithms for example 1.
例題 1 に対する各アルゴリズムの比較結果

Optimization Method	Convergence	$\nabla G(\boldsymbol{u})$	$G(\boldsymbol{u})$
PF	Converged	154	1297
AL	Converged	69	384
SQP	Converged	9	75
HL-RF	Not converged	—	—
MHL-RF	Converged	176	528
SMHL-RF	Converged	17	93

Table 3 Statistical properties of basic variables for example 2.
例題 2 における基本変数の統計的性質

Variable	Distribution	Mean	Std. dev.
X_1	Normal	$2.0 \cdot 10^{10}$	$0.5 \cdot 10^{10}$
X_2	Normal	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$0.2 \cdot 10^{-4}$
X_3	Normal	$4.0 \cdot 10^{3}$	$1.0 \cdot 10^{3}$

Table 4 Comparison of algorithms for example 2.
例題 2 に対する各アルゴリズムの比較結果

Optimization Method	Convergence	$\nabla G(\boldsymbol{u})$	$G(\boldsymbol{u})$
PF	Not converged	—	—
AL	Converged	93	565
SQP	Converged	9	75
HL-RF	Converged	10	96
MHL-RF	Converged	799	3196
SMHL-RF	Converged	11	45

4.3 例題 2[13)]

Fig. 2 に示すような不静定梁の曲げ破壊を考え，破壊条件として次式に示す最大たわみに関する破壊基準を採用する。

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 - 78.12 x_3 \tag{23}$$

ただし，基本変数は **Table 3** に示すように，全て正規分布に従うものとする。

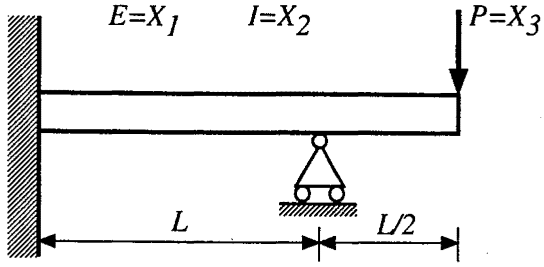

Fig. 2 Statically indeterminate beam of example 2.
例題 2 の不静定梁

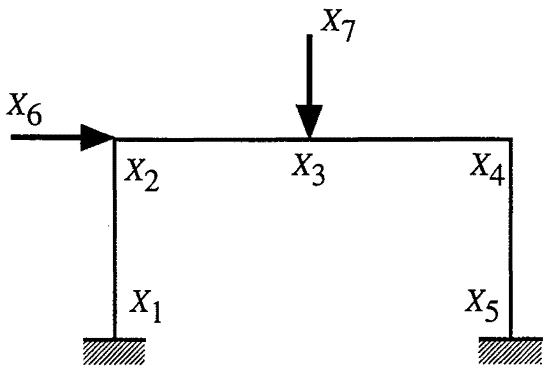

Fig. 3 Frame structure of example 3.
例題 3 のフレーム構造

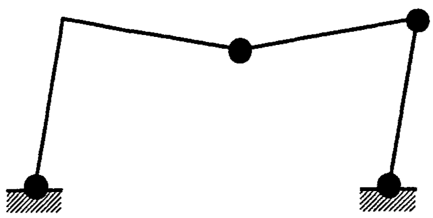

Fig. 4 Failure mode of example 3.
例題 3 の破損モード

例題 1 と同様に，各最適化アルゴリズムによって，この問題を解いた結果を **Table 4** に示す。本例題に対しては，ペナルティ関数法を除く全てのアルゴリズムが $\beta = 3.29$ に収束し，単純化修正 HL-RF 法が最も $G(\boldsymbol{u})$ の計算回数が少なかった。

4.4 例題 3[14)]

Fig. 3 に示すフレーム構造の破損を考える。このフレーム構造には全部で 3 個の破損モードが存在するが，ここでは **Fig. 4** に示す破損モードを考える。このモードの限界状態関数は，

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 - 5x_6 - 5x_7 \tag{24}$$

となる。また，基本変数の統計的性質は **Table 5** に示す通りとする。

Table 5　Statistical properties of basic variables for example 3.
例題 3 における基本変数の統計的性質

Variable	Distribution	Mean	Std.dev.
X_1	Lognormal	134.9	13.49
X_2	Lognormal	134.9	13.49
X_3	Lognormal	134.9	13.49
X_4	Lognormal	134.9	13.49
X_5	Lognormal	134.9	13.49
X_6	Lognormal	50	15
X_7	Lognormal	40	12

Table 6　Comparison of algorithms for example 3.
例題 3 に対する各アルゴリズムの比較結果

Optimization Method	Convergence	$\nabla G(\boldsymbol{u})$	$G(\boldsymbol{u})$
PF	Converged	88	1148
AL	Converged	43	516
SQP	Converged	12	155
HL-RF	Converged	13	105
MHL-RF	Converged	14	112
SMHL-RF	Converged	13	105

例題 1，2 と同様に，各最適化アルゴリズムによって，この問題を解いた結果を **Table 6** に示す。本例題に対しては，全てのアルゴリズムが $\beta = 2.88$ に収束し，HL-RF 法と単純化修正 HL-RF 法が最も $G(\boldsymbol{u})$ の計算回数が少なかった。

4.5 考　察

本論文で取り上げた例題に関する限り，計算効率及び一般性，ロバスト性の観点からは，単純化修正 HL-RF 法と逐次 2 次計画法が優れていることが示された。これらのアルゴリズムは，収束効率に影響を及ぼす未定パラメータを含まないという点でも優れている。しかし，単純化修正 HL-RF 法は逐次 2 次計画法と比較して，アルゴリズムが簡単であると同時に必要な記憶容量が少なくて済むという特徴があり，特に大規模な問題に対しては有利であると思われる。

5. 結　論

本研究によって，以下の結論が得られた。

(1) 修正 HL-RF 法のメリット関数を単純化するとともに，解が改善されないときのみ一次元探索を行うことによって計算効率を改善した単純化修正 HL-RF 法を提案した。

(2) 提案した単純化修正 HL-RF 法は，構造信頼性解析用アルゴリズムとして，計算効率，一般性，ロバスト性，記憶容量の観点から従来のアルゴリズムより優れていることが示された。

参 考 文 献

1) 佐々木哲也，AFOSM 法と重み付きモンテカルロ法を併用した構造物の破壊確率評価システムの開発，産業安全研究所研究報告，RIIS-RR-92, pp. 11–17 (1993).

2) Shinozuka, M., Basic Analysis of Structural Safety, ASCE, Journal of Engineering Mechanics, 109–3, pp. 721–740 (1983).

3) 今野　浩，山下　浩，非線形計画法，pp. 217–237, 日科技連 (1978).

4) 土木学会構造工学委員会，構造システムの最適化～理論と応用～，pp. 75–77, 土木学会 (1988).

5) 室津義定，米澤政昭，岡田博雄，松崎　敏，松本平樹，拡張線形化二次モーメント法による構造要素の信頼性解析，日本機械学会論文集 A 編，51–472, pp. 2811–2816 (1985).

6) Bourgund, U. and Vucher, C.G., Importance Sampling Procedure Using Design Points —ISPUD—, Report 8–86, Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck (1986).

7) 文献 4) の pp. 78–80.

8) Powel, M.J.D., Algorithms for Nonlinear Constraints that Use Lagrangian Functions, Mathematical Programming, 14–2, pp. 224–248 (1978).

9) Hasofer, A.M. and Lind, N.C., Exact and Invariant Second-Moment Code Format, ASCE, Journal of Engineering Mechanics, 100–1, pp. 111–121 (1974).

10) Rackwitz, R. and Fiessler, B., Structural Reliability under Combined Random Load Sequences, Computers & Structures, 9, pp. 489–494 (1978).

11) Liu, P.L. and Der Kiureghian, A., Optimization Algorithms for Structural Reliability, Structural Safety, 9, pp. 161–177 (1991).

12) 長　尚，基礎知識としての構造信頼性設計，pp.90–95, 山海堂 (1993).

13) トフ-クリステンセン，P.・ベイカー，M.J.，構造信頼性，pp. 87–99, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1986).

14) Madsen, H.O., First Order vs. Second Order Reliability Analysis of Series Structures, Structural Safety, 2, pp. 207–214 (1985).

(平成 12 年 1 月 17 日受理)