

液状化地盤の側方流動解析法の開発

玉手 聡*

Development of Numerical Simulation Method for the Ground Flow Caused by Seismic Liquefaction

by Satoshi TAMATE*

Abstract: The ground flow induced by seismic liquefaction is known to cause significant damage to lifeline networks and structures. The ground flow is not only caused by the dynamic forces induced by seismic acceleration but also by the static gravity force induced by the topography of the ground. Ground flow may sometimes continue after the seismic loading and finally the ground is significantly deformed and fails. Although the ground surface may keep its shape after an earthquake, differential movement inside tends to occur. However, this phenomenon has been researched only recently, and its mechanism is not well understood.

There have not been many reports of disasters induced by liquefaction in construction sites. However, as the construction works in such a deep excavation generally take a long period, temporary structures in those sites may be affected by the ground flow induced by seismic liquefaction. Therefore, both effects and safety against earthquake must be taken into account. A numerical simulation method which can predict the magnitude and direction of ground movement with reasonable accuracy is needed to prevent disasters.

This paper investigates by finite element simulation the ground flow that could occur when soil liquefaction continues for a sufficiently long period. It is considered that liquefied soil behaves like a viscous liquid, and hence, ground flow is governed by the minimum energy principle. In the calculation, liquefied sand is assumed to be a viscous liquid that deforms in the undrained condition and whose volume remains constant. To consider the geometric non-linearity due to the large deformations caused by ground flow, the updated Lagrangian method is used to calculate the equation of motion. To calculate the time history of the ground motion, the Newmark method is used. Finally, a simulation using this calculation method shows that the proposed method gives reasonable results for the conditions indicated.

Keywords; Deformation, Earthquake, Liquefaction, Ground flow, Finite Element Analysis, Time-history analysis, Geometric non-linearity

1. 研究目的

ゆるい砂質土からなる地盤は地震により液状化を生じることがある。液状化とは、土がせん断強度を失って、流体のごとくふるまう現象をいう。例えば、飽和した砂質土からなる水平地盤においては、地震などによる繰り返しせん断力が作用することによって土粒子の接触がは

ずれ、水中に土粒子が浮遊しているような状態になる。力学的には地盤内の土粒子間隙にある間隙水圧が上昇することによって有効応力が失われ、地盤強度が失われてしまう。有効応力が失われなくても、間隙水圧の上昇によって土は軟化し、地盤に大きなひずみが生じることがある。地盤の液状化が問題とされ始めたのはこの30年ほどの間である。過去の地震に際して、地中から砂や泥が水と一緒に吹き出す現象が観察されてお

*建設安全研究部 Construction Safety Research Division

り、低地などの軟弱な地盤では地震被害を大きくすることがあることは一部の人の間では認識されていた。しかし、あまり重大視はされず、現在ほど多くの人に知られる現象ではなかった。1964年に発生した新潟地震とアラスカ地震によって、液状化が、土木構造物や地中に埋設されたライフラインなどに甚大な被害を与えることが認識された。液状化による土構造物の流動破壊は、地震などによる動的荷重だけではなく静的荷重によって引き起こされたり、また地震動が終了した後も流動は継続して劇的な破壊に至る例が報告されている^{1),2)}。従ってこのような流動破壊を解析する場合、静的せん断力（自重）のもとでも地盤が大変形できるメカニズムについて研究することが重要であると考ええる。

土止め壁の裏込め土が液状化するとせん断抵抗が減少し、内部摩擦角が小さくなった場合と同じことになる。その結果、土止め壁に作用する主動土圧が大きくなる。他方、壁を支える前面の受働土圧や控え工の耐力は小さくなり壁の安定が危うくなる。このような地盤の流動現象が大規模掘削現場などの土止め構造物に及ぼす影響については、これまでほとんど解明されていない。しかし、これらの工事は施工期間が比較的長期であるため施工途上に地震を受ける可能性があり、工事の安全からも地盤流動がこのような土止め構造物に与える影響について検討する必要があると考える。本研究では地震によって生じる側方流動の予測手法を開発することを目的として、有限要素法による数値解析手法を開発した。液状化した地盤が大変形するメカニズムを探求することは被害発生の原因を理解するとともに災害防止対策の研究にも役立つことができる。

2. 研究方法

2.1 有限要素法³⁾

本解析は二次元の地盤モデルを対象とする。本報告では、地盤流動解析法の開発の第一段階として、液状化層のみから成る地盤についての解析手法の概要とその結果を述べる。有限要素法は、連続体を微小な三角形あるいは四角形要素に要素分割して計算する数値解析手法である。分割した要素は節点によって接合されており、節点における変位が既知であれば、要素に働く応力を解析することができる。それぞれの節点に働く力は、力の釣り合い条件を満たす必要がある。この条件を満たすために、節点の変位はいくつかの線形方程式を同時に満たさなければならない。

2.2 変位の構成

二次元三角形要素内の変形が線形的な変形と仮定すると、三角形要素の変位は節点変位によって書き改めることができる。(Fig. 1 参照)

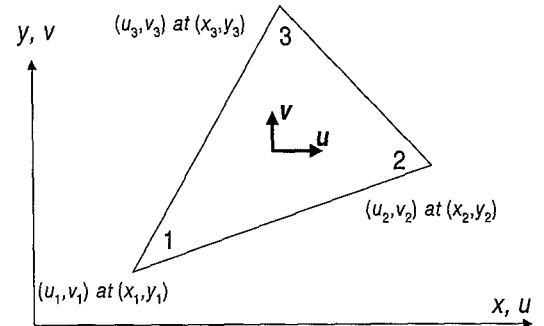


Fig. 1 Constant-strain triangle
三角形要素の変位構成

要素の水平及び鉛直変位 (u, v) は次式に示す一次変換式で表されると仮定する。

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v &= b_1 + b_2x + b_3y \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 a_i および b_i は未定係数である。式 (1) に節点座標を代入することによって係数が求まり、式 (2) のように整理することができる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \\ &\quad \times^t \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\} \\ &= [N] \{u\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 u, v は要素の水平及び鉛直変位であり、 u_i は三角形要素の節点の水平変位、 v_i は鉛直変位である。形状係数 N_i は次式によって求められる。

$$\{N_1 \ N_2 \ N_3\} = \{1 \ x \ y\} [A]^{-1} \quad (3)$$

ここで、

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4)$$

四角形要素を用いた解析を行う場合も三角形要素の場合と同様にして、要素内の変形が線形的であると仮定し、四角形要素の変位を節点変位に書き改める。

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 a_i および b_i は係数である。は水平及び鉛直変位である。

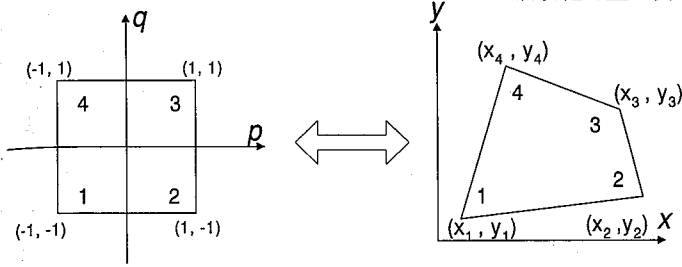


Fig. 2 Plane isoparametric element in $p-q$ space and four-node plane in $x-y$ space
 $p-q$ 座標と $x-y$ 座標間の変換

要素の形状が長方形である場合、上記の変換のための計算は比較的容易に行うことができる。しかし、四角形要素は長方形のみではなく任意の四角形の場合がある。そのため、座標変換手法を用いて任意の四角形要素における変形を考える。

Fig. 2 に $p-q$ 座標における 2×2 の長方形要素と、 $x-y$ 座標における任意の四角形要素を示す。

$p-q$ 座標から $x-y$ 座標への変換は式 (6) によって行う。

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2p + a_3q + a_4pq \\ y &= b_1 + b_2p + b_3q + b_4pq \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、対応する以下の節点座標を式 (6) に代入する。

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_1, y_1), & (p_1, q_1) &= (-1, -1) \\ (x, y) &= (x_2, y_2), & (p_2, q_2) &= (1, -1) \\ (x, y) &= (x_3, y_3), & (p_3, q_3) &= (1, 1) \\ (x, y) &= (x_4, y_4), & (p_4, q_4) &= (-1, 1) \end{aligned} \quad (7)$$

これにより次式の関係が得られる。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [N]^t \times \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4\} \quad (8)$$

ここで、 $[N]$ は形状係数のマトリックスであり式 (9) のようになる。

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-p)(1-q)/4 \\ N_2 &= (1+p)(1-q)/4 \\ N_3 &= (1+p)(1+q)/4 \\ N_4 &= (1-p)(1+q)/4 \end{aligned} \quad (10)$$

式 (10) は、節点座標を N_i によって書き表したものである。同様に、要素変位と節点変位の関係についても次式の通り表される。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{u\} \quad (11)$$

ここで、

$$\{u\} = {}^t\{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\} \quad (12)$$

2.3 エネルギー原理

本解析では、地盤流動はポテンシャルエネルギーを最小とすべく運動するとして運動方程式を解く⁴⁾。流動する地盤の持つエネルギーとして、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、散逸エネルギーを考えている。今回の取り組みでは、解析法の開発の第一段階として、液状化層のみを有する地盤の変形をシミュレートする。よって、液状化層については、せん断剛性をゼロと見なしているため、ひずみエネルギーは考慮しない。よって、ポテンシャルエネルギーは位置エネルギーによるもののみとなる。また、液状化した土は塑性的性質や砂粒子の衝突や摩擦などによって、かなりのエネルギーが消費されると考えられる。そのため、液状化した土を粘性流体と見なすことによって粘性減衰を考慮し、エネルギー消費の散逸関数を導入した⁵⁾。散逸エネルギーは粘性流体が運動する際に散逸するエネルギーである。これらのエネルギーの算出方法についてその概略を示す。

2.3.1 運動エネルギー

微小分割した任意の要素の運動エネルギーを次式に示す。

$$K = \int_S \frac{1}{2} \rho t \begin{Bmatrix} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \end{Bmatrix} dS \quad (13)$$

ここで、 ρ は物体の密度、 t は要素の奥行き方向の厚さ、 S は分割した要素の面積、 u および v は要素の水平及び鉛直変位、 T は転置マトリックス記号である。速度項は、分割する要素の形状に応じて、式 (2) あるいは式 (11) を用いて次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{Bmatrix} = [N] \left\{ \frac{du}{dt} \right\} \quad (14)$$

よって、運動エネルギーは次式のようにになる。

$$K = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{Bmatrix}^T [M] \left\{ \frac{du}{dt} \right\} \quad (15)$$

ここで、質量マトリックス $[M]$ は式 (16) で表される。

$$[M] = \rho t \int_S [N][N] dS \quad (16)$$

2.3.2 散逸エネルギー

散逸エネルギー⁵⁾は粘性流体が運動する際に散逸するエネルギーであり、次式によって表される。

$$D = \int_S \frac{1}{2} \eta t \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dS \quad (17)$$

ここで、 η は粘性係数である。

式(17)中の変数項は、分割する要素形状に応じて式(2)あるいは式(11)を用いて展開し、式(18)の関係が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right\} = [B] \left\{ \frac{du}{dt} \right\} \quad (18)$$

ここで、マトリックス $[B]$ は、三角形要素の場合は式(19)、四角形要素の場合は式(20)である。

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\text{or} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

散逸エネルギーは式(21)のように表される。

$$D = \frac{1}{2} \int_S \left\{ \frac{du}{dt} \right\}^T [C] \left\{ \frac{du}{dt} \right\} dS \quad (21)$$

ここで、粘性マトリックス $[C]$ は式(22)で表される。

$$[C] = \int_S \eta t^T [B][B] dS \quad (22)$$

2.3.3 位置エネルギー

位置エネルギーは通常、式(23)に示す分割要素上の標高を掛け合わせて算出する。

$$Q_p = \int_V \rho g y dV \quad (23)$$

$$= \rho g t \int_S y dS$$

さらに、上式に座標変換手法を用いて、節点変位に置き換えると式(24)のようになる。

$$Q_p = \rho g t \int_S [N] \{y\} dS \quad (24)$$

しかし、上記の解析手法の場合、位置エネルギーは、変形中も一定の値をとることになる。地盤の流動量に

対して支配的な位置エネルギーは、地盤が変形するに従って減少するが、式(24)によって算出される位置エネルギーは、変形前の位置エネルギーを変形中も保持するため、外力を過大に見込むことになる。そのため変位も過大に評価することになり、本解析で目的とする大変形問題を対象とするのに適切でない。そこで、本解析法では、新たな位置エネルギーの算出方法を検討したので、その概要を以下に述べる。

(1) 地盤を構成する各要素毎に、要素上の隣り合う節点間を1次式で表す。例として、節点 $(x_1 + u_1, y_1 + v_1)$ と $(x_2 + u_2, y_2 + v_2)$ においては次式のようになる。

$$y = \frac{(y_2 + v_2) - (y_1 + v_1)}{(x_2 + u_2) - (x_1 + u_1)} \times \{x - (x_1 + u_1)\} + (y_1 + v_1) \quad (25)$$

(2) (1)で算出した一次式を用いて、標高の二乗を要素の周上に反時計周りに積分する。

$$Q_p = \int_V \rho g y dV$$

$$= \rho g t \int_x \frac{1}{2} y^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2} \rho g t \quad (26)$$

$$\times \oint \left\{ \frac{(y_{i+1} + v_{i+1}) - (y_i + v_i)}{(x_{i+1} + u_{i+1}) - (x_i + u_i)} \times \{x - (x_i + u_i)\} + (y_i + v_i) \right\}^2 dx$$

ここで、 g は重力加速度、 i は節点番号、 n は要素の持つ節点数。

上記した手法により位置エネルギーは変位の関数として表すことができ、流動する地盤に作用する外力を適切に見込むことができると考える。ポテンシャルエネルギー Q は位置エネルギー Q_p と等しく次式の通りとする。

$$Q = Q_p \quad (27)$$

3. 運動方程式の導出

3.1 ラグランジュの方程式⁶⁾

地盤が流動する過程をシミュレートするためには、時刻歴運動を再現できる運動方程式を導く必要がある。本解析手法においては、第2章において算出した各エネルギーから運動方程式を導くために、ラグランジュの

方程式を用いる。ラグランジュの方程式は、ハミルトンの原理によって積分量が極値をとるという積分学的原理から導かれており、変分法を応用した式である。

本解析ではラグランジュの方程式に散逸エネルギーを考慮し、ラグランジュの未定乗数法による拘束条件を付加している。以下にその概要を示す。

流動する地盤の運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー Q を考える場合、運動エネルギーは速度と時間 t の関数であり、ポテンシャルエネルギーは変位と時間 t の関数である。ここでラグランジアン L は、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差として式 (28) のように表される。

$$\begin{aligned} L &= L(u, \dot{u}, t) \\ &= K(\dot{u}, t) - Q(u, t) \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、ラグランジアン L の積分を I とすると式 (29) で表される。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(u, \dot{u}, t) dt \quad (29)$$

この積分 I が極値を持つ関数である場合、の変分をそれぞれの変数について表すと式 (30) で表される。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ (K(\dot{u} + \delta\dot{u}) - K(\dot{u})) \right. \\ &\quad \left. - (Q(u + \delta u) - Q(u)) \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta\dot{u} \frac{\partial K(\dot{u})}{\partial \dot{u}} - \delta u \frac{\partial Q(u)}{\partial u} \right\} dt \\ &= \left[\delta u \frac{\partial K(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta u(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \right) + \delta u \frac{\partial Q(u)}{\partial u} \right\} dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

式 (30) が、任意の $\delta u(t)$ 及び任意の時刻 t において成立しなければならない。よって、ラグランジュの方程式は以下のように導かれる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial Q(u)}{\partial u} = 0 \quad (31)$$

式 (31) に散逸エネルギー D を加えると式 (32) のようになる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial Q(u)}{\partial u} + \frac{\partial D(\dot{u})}{\partial \dot{u}} = 0 \quad (32)$$

3.2 ラグランジュの未定乗数法⁶⁾

流動する地盤内の液状化層は、水で飽和した砂が非排水状態で変形していると考えられる。これは、緩く堆積した砂地盤が地震等によってせん断変形をする場合、砂地盤内の水の透水速度はせん断変形速度に比べて遅いと考えるために、せん断変形中はほぼ非排水状態と見なすことができるためである。非排水状態とは、土粒子内に存在する水が粒子間の隙間から排水されないことを意味し、土は体積を一定に保ったまま変形することになる。よって、ラグランジュの方程式中に、液状化層部の要素が体積を一定に保つ拘束条件を加える。この体積一定条件を考慮した方程式の導入においては、ラグランジュの未定乗数法を用いる。体積一定条件を付加する要素については、変形前後の体積が等しいとして、拘束条件を付加する要素毎に対して、式 (33) の条件を加える。

$$V_i - V_{i0} = 0 \quad (i = 1 \sim n) \quad (33)$$

ここで、 V_{i0} は変形前の体積であり、 V_i は変形後の体積である。また、 n は拘束条件を付加する要素数である。分割した要素の体積は、位置エネルギーの算出に使用した要素の周上を積分して求める方法を使用しており、変形前の体積は式 (34)、変形後の体積は式 (35) によって求められる。

$$\begin{aligned} V_{i0} &= \int_V dV \\ &= t \int_x y dx \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} V_i &= -t \left\{ \oint \left\{ \frac{y_{i+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} (x - x_j) + y_j \right\} dx \right\} \\ &= -t \left\{ \oint \left\{ \frac{(y_{j+1} + v_{j+1}) - (y_j + v_j)}{(x_{j+1} + u_{j+1}) - (x_j + u_j)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \{x - (x_j + u_j)\} + y_i + v_j \right\} dx \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

n 個の拘束条件がある場合、この条件に未定乗数 λ_i を乗じて式 (29) に加えると式 (36) が得られる。

$$\begin{aligned} L &= L(u, \dot{u}, t) \\ &= K(\dot{u}) - Q(u) + \sum_{i=1}^n \{\lambda_i (V_i(u) - V_{i0}(u))\} \\ I &= \int_{t_1}^{t_2} \left(K(\dot{u}) - Q(u) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \{\lambda_i (V_i(u) - V_{i0}(u))\} \right) dt \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、積分 I が極値をとる関数である場合、積分 I の変分をそれぞれの変数について表すと、以下のよう
に变形できる。

$$\begin{aligned}
 \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(K(\dot{u} + \delta\dot{u}) - K(\dot{u}) \right) \right. \\
 &\quad - (Q(u + \delta u) - Q(u)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \{ \delta\lambda_i (V_i(u) - V_{i0}(u)) \} \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \{ \lambda_i (V_i(u + \delta u) - V_i(u)) \} \right\} dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta\dot{u} \frac{\partial K(\dot{u})}{\partial \dot{u}} - \delta u \frac{\partial Q(u)}{\partial u} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_i \delta u \frac{\partial V_i(u)}{\partial u} \right\} \right\} dt \\
 &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \{ \delta\lambda_i (V_i(u) - V_{i0}(u)) \} \right\} dt \\
 &= \left[\delta u \frac{\partial K(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \right]_{t_1}^{t_2} \\
 &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta u(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \delta u \frac{\partial Q(u)}{\partial u} - \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_i \delta u \frac{\partial V_i(u)}{\partial u} \right\} \right\} dt \\
 &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \{ \delta\lambda_i (V_i(u) - V_{i0}(u)) \} \right\} dt = 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

式 (37) が、任意の $\delta\lambda_i$ 及び δu について成立し、かつ任意の時刻 t において成立しなければならない。よって、体積一定条件と散逸エネルギーを考慮した運動方程式は式 (38) となる。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial Q(u)}{\partial u} + \frac{\partial D(\dot{u})}{\partial \dot{u}} \\ \quad - \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_i \frac{\partial V_i(u)}{\partial u} \right\} = 0 \\ V_i(u) - V_{i0}(u) = 0 \quad (i = 1 \sim n) \end{cases} \tag{38}$$

ここで、式 (38) に示す第 1 式第 4 項は計算の簡略化のために非線形項を無視しており、式 (39) に示す通りとする。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_i(u)}{\partial u} &= \frac{1}{2} \times \begin{Bmatrix} y_2 + y_3 + v_2 + v_3 \\ x_3 - x_2 + u_3 - u_2 \\ y_3 - y_1 + v_3 - v_1 \\ x_1 - x_3 + u_1 - u_3 \\ y_1 - y_2 + v_1 - v_2 \\ x_2 - x_1 + u_2 - u_1 \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{Bmatrix} \\
 &= \{S\}
 \end{aligned} \tag{39}$$

また、式 (38) に示す第 2 式についても非線形項を無視して式 (40) の通りとする。

$$\begin{aligned}
 V_i(u) - V_{i0}(u) &= \frac{1}{2} \left\{ (x_1 - x_2 + u_1 - u_2)(y_2 + y_1 + v_2 + v_1) \right. \\
 &\quad + (x_2 - x_3 + u_2 - u_3)(y_3 + y_2 + v_3 + v_2) \\
 &\quad \left. + (x_3 - x_1 + u_3 - u_1)(y_1 + y_3 + v_1 + v_3) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left\{ (x_1 - x_2)(y_2 + y_1) + (x_2 - x_3)(y_3 + y_2) \right. \\
 &\quad \left. + (x_3 - x_1)(y_1 + y_3) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{Bmatrix} \{u\} \\
 &= \{S\}\{u\}
 \end{aligned} \tag{40}$$

式 (15)、式 (21)、式 (26) に示す各エネルギーを式 (38) に代入して整理すると、式 (41) に示す運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 [M] \frac{d^2 u}{dt^2} + [C] \frac{du}{dt} + \{[F] + [S]\}\{u\} \\
 + [S]\{\lambda\} + \{r\} = 0
 \end{aligned} \tag{41}$$

ここで、マトリックス $[F]$ と $\{r\}$ は次式によって求められるものである。

$$\frac{\partial Q_p(u)}{\partial u} = \{r\} + [F]\{u\} \tag{42}$$

3.3 時刻歴運動の解析法

流動現象の時間的な経過を模擬的な手段によって再現 (シミュレーション) するためにニューマークの β 法

を用いる。シミュレーションを行う際には、微分方程式を数値的に解くために考案された各種の方法を用いる。本研究では、線形加速度法を応用したニューマークの β 法を用いて地盤流動をシミュレートしている。ニューマークの β 法の詳細は文献²⁾を参照されたい。

傾斜した地盤において液状化が発生することによって、側方流動現象のような大変形が生ずる。この現象を数値解析によりシミュレートする場合には、幾何学的な非線形性について考慮する必要がある。

通常、非線形問題に対してはいくつかの線形ステップに分けて段階的に解析を行う。本解析においてもシミュレートする時間について微小分割し、時間間隔 Δt の線形ステップに分けて段階的に計算する手法を用いた。運動方程式は各計算ステップの計算を終了する毎に更新する Updated Lagrangian 法を用いている。ここで、式(41)に示す運動方程式について、Updated Lagrangian 法による解析の流れを示す。

解析ステップ i (時刻 t_i)における運動方程式を次式のように書き改める。

$$[M_i]\{\ddot{u}(t_i)\} + [C_i]\{\dot{u}(t_i)\} + ([S_i] + [F_i])\{u(t_i)\} + [S]\{\lambda\} = -\{r_i\} \quad (43)$$

式(43)にニューマークの β 法を適用して微小時間 Δt 後における各変数を求める。時刻 $t + \Delta t$ における関係は式(44)の通りである。

$$[M_i]\{\ddot{u}(t_i + \Delta t)\} + [C_i]\{\dot{u}(t_i + \Delta t)\} + ([S_i] + [F_i])\{u(t_i + \Delta t)\} + [S_i]\{\lambda\} = -\{r_i\} \quad (44)$$

次のステップ($i+1$)の運動を求めるには、式(44)で算出した新しい座標系における運動方程式の各係数マトリックス $[M_{i+1}]$, $[C_{i+1}]$, $[S_{i+1}]$, $[F_{i+1}]$ を再計算し、式(45)のように更新する。

$$[M_{i+1}]\{\ddot{u}(t_{i+1})\} + [C_{i+1}]\{\dot{u}(t_{i+1})\} + ([S_{i+1}] + [F_{i+1}])\{u(t_{i+1})\} + [S_{i+1}]\{\lambda\} = -\{r_{i+1}\} \quad (45)$$

ここで、

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad (46)$$

式(45)中の各マトリックスは、時刻 $t + \Delta t$ における座標から求めて更新する。この更新した運動方程式が更新前の運動と連続したものにするために、加速度と速度については時刻 $t + \Delta t$ の値に等しいとして、更新した運動方程式の初期値とする。一方、変位については、

新たな座標における運動の計算となるので初期値はゼロとおく。

$$\begin{aligned} u(t_{i+1}) &= 0 \\ \dot{u}(t_{i+1}) &= \dot{u}(t_i + \Delta t) \\ \ddot{u}(t_{i+1}) &= \ddot{u}(t_i + \Delta t) \end{aligned} \quad (47)$$

しかし、ここで式(41)より解析的に求めた加速度と速度の各変数を更新した運動方程式(43)に代入した場合、更新によって運動方程式の係数が変わっているために恒等的に等しくならない場合が生じ、数値的な計算エラーを生ずる可能性がある。よって、この計算は加速度を修正して対応し、修正した加速度は次式によって求める。

$$\begin{aligned} &\{\ddot{u}(t_{i+1})\}_{\text{mod}} \\ &= \left(-\{r_{i+1}\} - [S_{i+1}]\{\lambda\} - [C_{i+1}]\{\dot{u}(t_{i+1})\} \right. \\ &\quad \left. - ([S_{i+1}] + [F_{i+1}])\{u(t_{i+1})\} \right) / [M_{i+1}] \end{aligned} \quad (48)$$

加速度を修正し、更新した運動方程式は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} &[M_{i+1}]\{\ddot{u}(t_{i+1})\}_{\text{mod}} + [C_{i+1}]\{\dot{u}(t_{i+1})\} \\ &+ ([S_{i+1}] + [F_{i+1}])\{u(t_{i+1})\} + [S_i]\{\lambda\} = -\{r_{i+1}\} \end{aligned} \quad (49)$$

上記の計算過程を繰り返して地盤流動をシミュレートする。

4. 解析モデルに対する計算の適用

4.1 使用した要素モデル

2章に述べたとおり、本解析においては液状化層の変形条件として、分割した要素ごとに等体積条件を付加した。これに加えて、分割する要素形状についても等体積条件を満足することが必要である。そのため要素形状による解析への適応性を以下のように検討した。

Fig. 3は、単位奥行き当たりの傾斜した液状化地盤を簡単のために二つの三角形要素によって分割した例を示す。点線で示す初期状態にある液状化した地盤はポテンシャルエネルギーを最小とすべく変形するので、最終的には実線で示す水平状態となる。しかし、地盤がこのように水平となる場合、図中の二つの三角形要素 Element, A と Element, B は体積(面積)が変化しており、等体積条件を満足する変形ができない。

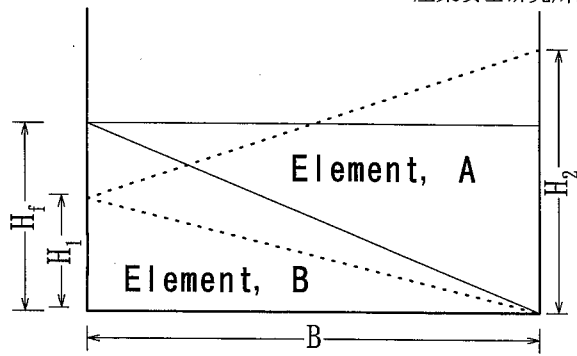


Fig. 3 Example of the volumetric deformation of triangular element.
三角形要素の体積変化の例

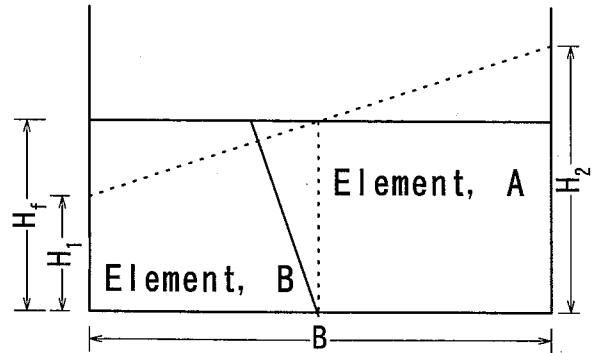
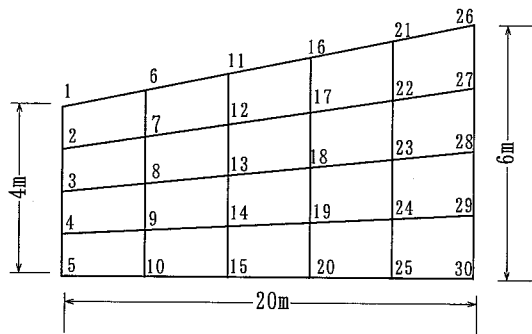
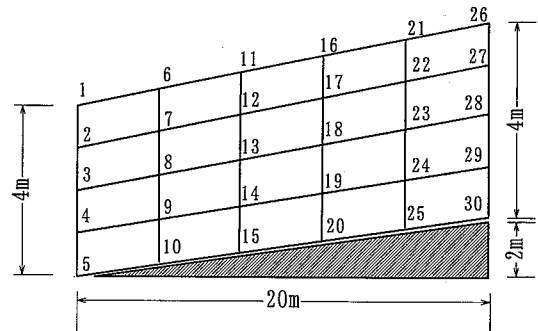


Fig. 4 Example of the volumetric deformation of quadrilateral element.
四角形要素の場合の変形例



Outline of case-1



Outline of case-2

Fig. 5 Outline of model ground for calculation performed.
解析を行ったモデル地盤の概要

一方 Fig. 4 は四角形要素による要素分割を行った場合を示す。四角形により要素分割された傾斜地盤は、Fig. 4 に示すとおりポテンシャルエネルギーが最小となる水平状態に変形しても、二つの四角形に分割された要素は体積を一定に保つことができる。そのため、液状化層部については四角形要素による要素分割を行ってモデル化を行うこととした。

4.2 計算に用いるパラメータ

本解析法においては、計算に必要とするパラメータ数をできるだけ少ないものにするを目的としている。従来の地盤工学的な数値解析では、土という力学的に複雑な特性の材料を定式化するために、様々な室内要素試験（軸対称三軸試験、一軸試験、中空ねじり試験など）や原位置地盤の幾何学的条件等を調べる必要があった。しかし、液状化した土の力学特性は工学ひずみで約 100% に及ぶこともあり、このような大きなひずみレベルにおける液状化土の力学特性を定式化することは非常に難しい問題である。また、本研究では地震による液状化地盤の側方流動現象の解析を目的としており、対象とする地盤領域がかなり広範囲となる。そのため、実際に地盤全域の土質条件を調査し、かつ力学試験を行うことはかなりの費用と労力を必要とすることにな

り、現実的にはほぼ不可能なことである。そこで本解析においては、できる限りパラメータの簡略化を行いながらも、現象の的確なシミュレート法を開発することを試みた。本解析において用いる土質パラメータは単位体積重量 γ (tf/m^3)、粘性係数 η ($\text{tf}/\text{m}^2 \cdot \text{sec}$) であり、その他 3 章で述べた解析上のパラメータはニューマークの β 法の数値的減衰係数 γ 、加速度分布係数 β 、時間間隔 Δt である。

本解析では、ニューマークの β 法による数値的減衰は使用していないので $\gamma = 1/2$ とし、加速度分布は時刻 t と $t + \Delta t$ の間の平均加速度値を用いているので $\beta = 1/4$ とした。また、解析地盤の境界条件は実験的研究の結果を参考にして、液状化層と底部基盤との境界面において変位のずれは生じないとした^{7),8)}。

5. モデル地盤の解析結果

開発した流動解析プログラムを用いて、2 ケースのモデル地盤について解析を行った結果を示す。解析を行ったモデル地盤の条件を Fig. 5 に示す。いずれの解析モデルも、地盤は液状化層のみによって構成されており、地盤表面の勾配は 10% である。case-1 は底部基盤は水平であるが、case-2 では地盤表面と同じく 10% の勾配を有したものとなっている。

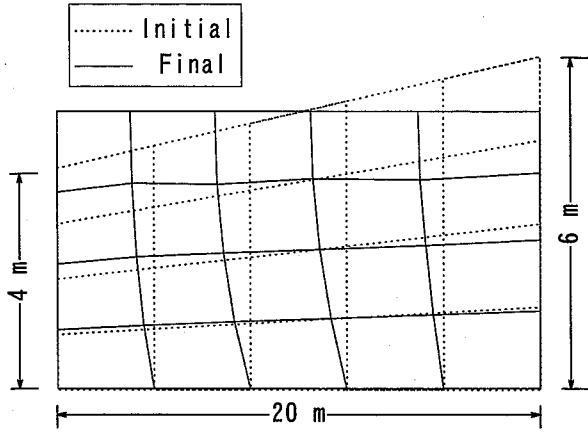


Fig. 6 Calculation result of the ground flow in "case-1".
液状化地盤の流動状況 (case-1)

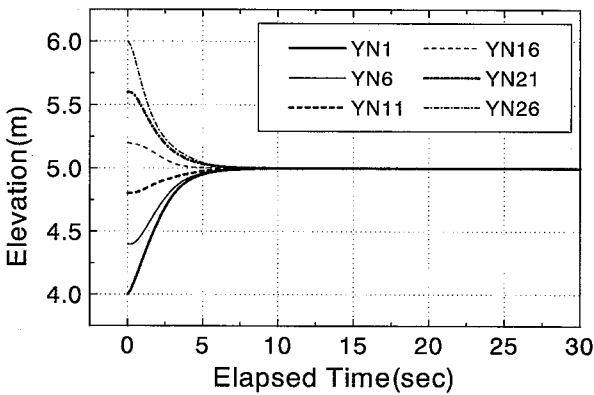


Fig. 7 Vertical displacements at the ground surface in "case-1".
地盤表面の鉛直方向の時刻歴変動 (case-1)

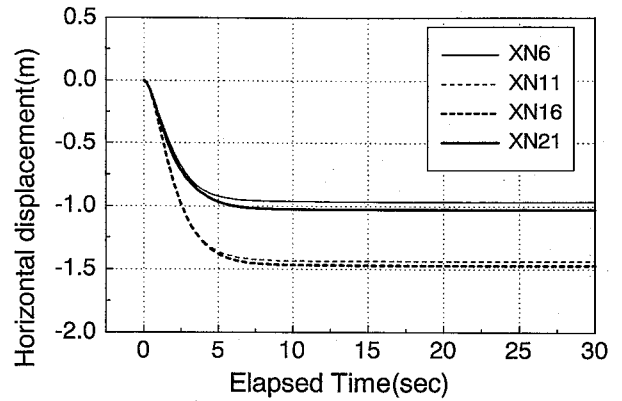


Fig. 8 Horizontal displacements at the ground surface in "case-1".
地盤表面の水平方向の時刻歴変動 (case-1)

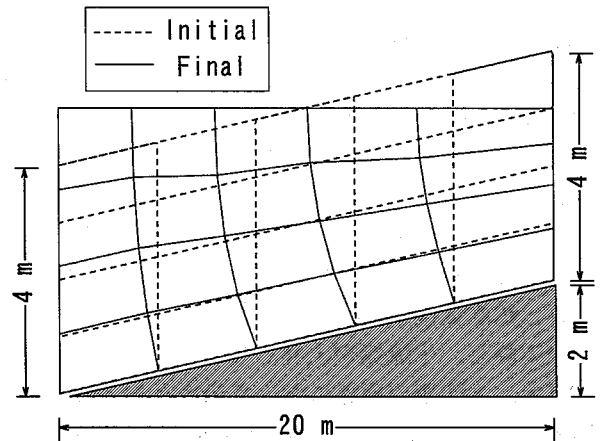


Fig. 9 Calculation result of the ground flow in "case-2".
液状化地盤の流動状況 (case-2)

解析に用いた土質パラメータとして、液状化層部の土の単位体積重量 (γ) は $1.8 \text{ (tf/m}^3\text{)}$ とし、粘性係数 (η) は $4.0 \text{ (tf/m}^2\text{-sec)}$ としている。

Fig. 6 に case-1 の流動解析の計算結果を示す。点線は地盤の初期形状を示し、実線は流動後の最終的な変形状況を示している。流動解析の計算は時間間隔 $\Delta t = 1/500 \text{ (sec)}$ で 15000 回の繰り返し計算を行い、30 秒間の流動をシミュレートしている。傾斜した地盤は最終的に水平となっており、地盤内の水平変位は全体的に深さ方向に正弦関数的な形状に分布している。水平変位は傾斜地盤の中央付近で最大となっており、地盤の上流 (右方) 及び下流 (左方) 側に近づくにつれて変位は小さくなっている。鉛直変位は斜面中央を境に上流側が下降し、下流側が上昇している。変位量は上、下流側の境界において最大となっている。分割した各要素の体積変化は、15000 回の繰り返し計算後においても $10^{-3}(\%)$ 程度であり、ほぼ等体積条件下の流動をシミュレートできている。

Fig. 7 は case-1 における地盤の鉛直方向の運動状況を示す。図中の縦軸は、地盤表面の鉛直座標値を表し、横軸は経過時間を示す。図中の凡例 YN1 から YN26 は Fig. 5 に示す各節点番号の鉛直座標の値を示している。斜面上にある各節点は鉛直運動して、時間経過とともに一定値に収束しており、最終的に斜面が水平状態になることを示している。case-1 の場合、斜面の標高は約 10 秒程度で一定値に収束している。粘性係数を数種類に変えて行った計算結果からは、収束に要する時間は粘性係数に依存しており、粘性係数が大きな場合は収束までの時間が長くなり、粘性係数が小さな場合は振動を繰り返しながら徐々に収束することを確認した。

Fig. 8 は case-1 の地盤表面の水平変位状況を示している。図中の凡例 XN6 から XN21 は Fig. 5 に示す各節点番号の水平座標の値を示している。Fig. 7 と同様に、水平変位も約 10 秒で運動が終了している。また変位量は、斜面中央部付近である XN11 と XN16 が大きくなっている。水平変位量は斜面中央に対して上流側

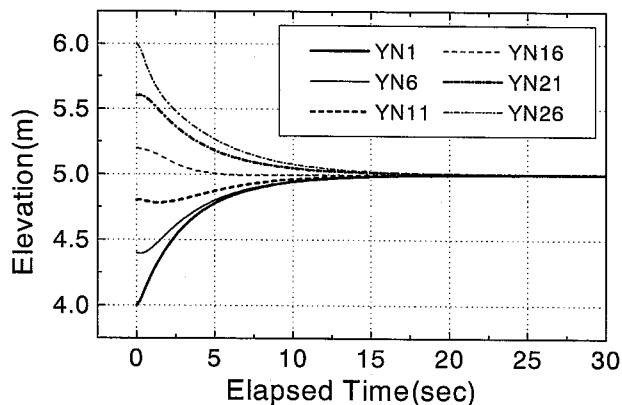


Fig. 10 Vertical displacements at the ground surface in "case-2".

地盤表面の鉛直方向の時刻歴変動 (case-2)

と下流側でほぼ対称になっている。

Fig. 9 は、case-2 の流動解析の計算結果を示す。case-1 と同様に、傾斜した地盤は最終的に水平となっており、地盤内の水平変位は全体的に深さ方向に対して正弦関数的に分布している。水平変位は傾斜した地盤の上流側（右方）で大きく、地盤の下流（左方）側に近づくにつれて変位は小さくなっており、case-1 と異なっている。鉛直変位は case-1 と同様に斜面中央を境に上流側が下降し、下流側が上昇している。また、鉛直変位量は上、下流側の境界において最大となっている。

Fig. 10 に case-2 の地盤の鉛直運動状況を示す。case-1 と同様に、斜面上にある各節点は鉛直方向に運動して、時間経過とともに緩やかに一定値に収束しており、最終的に斜面が水平状態になることを示している。case-2 の場合では case-1 に比較して斜面の標高の収束に要する時間が約 2 倍の 20 秒程度を要しており、底部基盤の傾斜による影響が現れているものと思われる。

6. まとめ

6.1 研究結果の概要

開発した液状化地盤の流動解析法とこれを用いた解析結果の概要を以下に述べる。

- (1) 液状化した傾斜地盤の側方流動現象をシミュレートできるプログラムを開発した。
- (2) 地盤の初期状態から最終的な変状に至るまでの一連の挙動をシミュレートできた。
- (3) 分割した各要素の体積変化は、15000 回の繰り返し計算後においても 10^{-3} (%) 程度であり、ほぼ等体積条件下の流動をシミュレートできた。
- (4) ポテンシャルエネルギーが最小となる状態まで地盤は流動して大変形する解析が行えた。

- (5) 流動変位分布と流動に要する時間は液状化層下部の基盤形状が影響を与えることが確かめられた。

6.2 今後の課題

解析プログラムの主要な部分は完成しており、本報告書に示す数例のモデル地盤について流動をシミュレートできることを確認している。本研究は今後もさらに開発を続け、本解析法の改良及び発展を行っていく予定である。今後の解析に取り入れるべき課題として以下のことが挙げられる。

- (1) 解析領域を広げ、数百メートル程度に及ぶ地盤領域について解析を行えるようにする。
- (2) 流動現象をシミュレートすると同時に、これによって発生する土圧を評価できるようにする。
- (3) 液状化層上部に存在する不飽和土層に弾塑性モデルを導入する。

(1) の問題については、より要素数の大きな計算を可能とするように、プログラムの改良を行うと同時に、要素数の増加によって生ずるとされる数値計算上のエラーの発生に対処する。(2) の問題については、流動現象をシミュレートすると同時に、これに伴って発生する土圧の計算を可能とすることが、土木構造物の建設や災害防止対策においては必要になる。(3) の問題については、液状化層上部に存在する表層の不飽和土層については現段階では考慮していないが、流動によって生ずる残留変形などを考慮するためには、不飽和土層を有するモデルについて解析可能なものとする必要がある。また、現在 20 要素程度の解析領域で 30 秒間の流動をシミュレートするのに約 2 時間程度の計算時間を要している。今後、数百要素に及ぶ大きな領域の計算においては数日の計算時間を要することが予想され、計算速度を向上させるためのプログラムの改良も必要であると思われる。

今後は上記の諸問題について引き続き研究を行い、地震時の地盤流動によって発生する土止め構造物の崩壊災害の防止に役立てたいと考えている。

参考文献

- 1) Hamada, M., Towhata, I., Yasuda, S. and Isoyama, R., Study on permanent ground displacement induced by seismic liquefaction, Computers and Geotechnics, Vol. 4, pp. 197-220, (1987).
- 2) 伯野元彦, 被害から学ぶ地震工学, 鹿島出版会 (1992).
- 3) Robert D. Cook., CONCEPTS AND APPLICATIONS OF FINIT ELEMENT ANALYSIS Second Edition, JOHN WILEY & SONS, Inc., (1981).

- 4) Towhata, I., Sasaki, Y., Tokida, K., Matumoto, H., Tamari, Y. and Yamada, K., Prediction of permanent displacement of liquefied ground by mean of minimum energy principle, *Soils and Foundations*, Vol. 32, No. 3, pp. 97-116.
- 5) Toyota, H., Shaking table tests and analytical prediction on lateral flow of liquefied ground, Doctoral paper of The University of Tokyo, (1995).
- 6) 市村宗武, 力学, 朝倉書店 (1994).
- 7) Arakawa, T., Kawashima, K., Matsumoto, H. and Kondo, M., Experimental study of embankment on sandy layers during earthquakes, Proc. 16th Meeting of US-Japan Panel on Wind and Seismic Effects, UJNR, pp. 649-666.
- 8) Towhata, I., Yasuda, S., Ootomo, K. and Yamada, K., Experimental studies on liquefaction induced permanent ground displacement, Proc. 1st Japan-US Workshop on Liquefaction, Large Ground Deformation and Their effects on Lifeline Facilities, Tokyo, pp. 81-92, (1988).
- 9) Sasaki, Y., Towhata, I., Tokida, K., Yamada, K., Matumoto, H., Tamari, Y. and Saya, S., Mechanism of permanent displacement of ground caused by seismic liquefaction, *Soils and Foundations*, Vol. 32, No. 3, pp. 79-96, (1992).

(平成9年1月20日受理)