

Research Reports of the National Institute  
of Industrial Safety, NIIS-RR-94 (1995)  
UDC 621.873:539.411:539.4.012

## クレーン等の構造計算に用いられる座屈係数について

前田 豊\*

### On the Buckling Coefficients Used for the Calculation of Crane Structure

by Yutaka MAEDA\*

**Abstract**: In this report, the theory and the calculation procedure of the buckling coefficients used for the buckling strength calculation of crane structure were clarified and summarized at first. Buckling stress in the elastic range was calculated by Euler's formula, and that in the plastic range was by Jäger's formula. The buckling stress in the plastic range was obtained under the following assumptions; (a) steel had the complete elasto-plastic characteristics, (b) the compressive force acted to the column with the initial eccentricity  $a$ , where  $a/i = 1/20 + \lambda/500$ ,  $i$  was the radius of gyration of sectional area, and  $\lambda$  was the effective buckling length of the column, (c) the center line of the column deformed along a sine curve.

Buckling stresses in both ranges were divided by the safety factors, 2.5 or 1.5 respectively. The allowable buckling stress was defined as the minimum of these values or the allowable compressive stress. The buckling coefficient  $\omega$  was obtained as the quotient of allowable compressive stress divided by the allowable buckling stress. Allowable buckling stress of a general column was derived from a column of T-type section, and that of a pipe column was from the pipe section, whose shell thickness was 1/6 of the diameter. As both of the derived equations were irrational, the Newton-Raphson method was used to solve them numerically.

Secondary, values of allowable compressive stress and yield point, which had been used to calculate the buckling coefficients in the present construction code for crane and mobile crane, were obtained by the reverse calculation, and it became clear that they had some differences from the provided allowable compressive stress of the steel concerned.

Concerning with the changes of allowable stress of steel to be the smaller value of the yield point divided by 1.5 and tensile strength divided by 1.8, and the range of steel grade, it was discussed the safest condition of the values of yield point and tensile strength for the decision of the buckling coefficients in each new range of steel. It became clear that in the area of  $\sigma_B$  being greater than  $1.2\sigma_e$ , the safest  $\omega$  was obtained by the greatest  $\sigma_e$ , and in the area of  $\sigma_B$  being less than  $1.2\sigma_e$ , it was by the least  $\sigma_e$  under the condition of the maximum  $\sigma_B$ . The new buckling curves of those steels were calculated.

**Keywords**; Crane, Standard, Structure, Buckling coefficient, Safety factor

#### 1. はじめに

クレーンあるいは移動式クレーンの構造部分は、最低限の強度をそれぞれの構造規格<sup>1),2)</sup>により計算して

確認することとされている。その中で、長柱の座屈に関しては、部材の細長比  $\lambda$  から座屈係数  $\omega$  を求め、許容圧縮応力  $\sigma_{ca}$  を  $\omega$  で除して許容座屈応力  $\sigma_k$  を求めるという、いわゆる  $\omega$  法によることが定められている。

\*機械システム安全研究部 Mechanical and System Safety Research Division

構造規格では、JIS 規格<sup>3)</sup>と同様に、鋼材が強度別に分類され、それぞれの鋼材の座屈計算に用いるべき  $w$  の値が別表に与えられている。二つの構造規格と JIS 規格には同じ値の  $w$  表が用いられており、それぞれの表には一般断面の長柱に対する  $w$  と鋼管に対する  $w$  とが示されている。また、構造規格内の表に示された強度を超える材料については、通達によって  $w$  の値が与えられている。しかし、これらの  $w$  の計算式については、一般断面の長柱に対するものが JIS 規格に示されているものの、使用されることの多い鋼管に対する  $w$  については示されておらず、また、計算に用いられた材料定数については、DIN 規格<sup>4)</sup>にあるものと同じ二つの表を除いて明らかにされていない。

また、許容応力が異なるクレーンと移動式クレーンとで同じ  $w$  表が用いられており、その算出法が明らかでないこともあって、 $w$  法そのものの妥当性について疑問が投げかけられたり、 $w$  は経験により算出された値であると誤解されたこともある。この誤解を防ぎ、また座屈に対する安全性を定量的に評価可能とするためには、座屈係数の計算理論を整理してまとめ、具体的に計算する手順を明らかにすることが必要であると考えられる。

このため、本報においては、現行のクレーン等構造規格における座屈係数の計算理論及び具体的な解法について検討した結果を報告するとともに、座屈係数の計算に用いられていた具体的な数値を明らかにするため、これを逆算する方法とその結果、さらに、鋼材の基本安全率を変更し、強度区分を変更したときの座屈安全率について検討した結果について報告する。

## 2. 定義および記号

本報においては、用語と記号を次の意味に用いる。なお、応力とひずみは引張り側を正にとるのが通例であるが、本報では圧縮側の解析が主な対象であるため、特に断りのない限り圧縮側を正にとって記述する。

弾性域 : 柱の断面のうち、応力が降伏点を超えない部分

塑性域 : 柱の断面のうち、応力が降伏点を超えて塑性変形している部分

弾性範囲 : 弾性座屈計算式による値によって許容座屈応力が決定される柱の細長比の範囲

塑性範囲 : 塑性座屈計算式による値によって許容座屈応力が決定される柱の細長比の範囲

$A$  : 全断面 (あるいはその面積)

$A_1$  : 断面のうちの塑性域

$A_2$  : 断面のうちの弾性域

$E$  : 縦弾性係数

$I$  : 断面の図心を通る軸まわりの、全断面についての断面二次モーメント

$I_1$  : 弾・塑性の境界線を軸とした、塑性域についての断面二次モーメント

$I_2$  : 弾・塑性の境界線を軸とした、弾性域についての断面二次モーメント

$K$  : パイプの管厚と内半径の比 ( $= t/R$ )

$K_0$  :  $(1 + K)^4 - 1$

$M_m$  : 柱の中央における曲げモーメント

$P$  : 柱に対する圧縮力

$R$  : パイプの内半径

$S_1$  : 弾・塑性の境界線を軸とした、塑性域についての断面一次モーメント

$S_2$  : 弾・塑性の境界線を軸とした、弾性域についての断面一次モーメント (負の値になる)

$Z_1$  : 圧縮側の断面係数

$a$  : 荷重の偏心量

$c$  : 塑性域の幅

$e_1$  : 断面の図心から圧縮側最外部までの距離

$e_2$  : 断面の図心から引張り側最外部までの距離

$h$  : 断面のはり高さ

$i$  : 断面二次半径

$k_z$  : 断面上の図心から核の引張り側までの距離

$l$  : 柱の長さ

$m$  :  $a/k_z$

$t$  : パイプの管厚あるいは T 形断面柱の厚さ

$v$  : 柱の上端から  $z$  の点におけるたわみ

$v_m$  : 柱の中央部でのたわみ

$x$  : 弾・塑性域境界線から断面内の位置まで、塑性域方向を正にとった距離

$z$  : 柱の上端からの距離

$\epsilon_1$  : 圧縮側最外部のひずみ

$\epsilon_2$  : 引張り側最外部のひずみ

$\epsilon_e$  : 降伏ひずみ

$\varphi$  : 塑性域の位置を示す角

$\varphi_0$  : 弾性域と塑性域の境界がパイプの内周と交わる位置を示す角

$\varphi_1$  : 弾性域と塑性域の境界がパイプの外周と交わる位置を示す角

$\lambda$  : 柱の細長比

$\mu$  : 中立軸から弾・塑性の境界線までの距離

$\rho$  : 中心線の曲率半径

$\rho_m$  : 柱の中央における中心線の曲率半径

$\sigma_1$  : 圧縮側最外部の応力

$\sigma_2$  : 引張り側最外部の応力

- $\sigma_e$  : 降伏点あるいは耐力  
 $\sigma_x$  : 降伏点と、位置  $x$  における応力との差  
 $\sigma_m$  : 断面全体の平均圧縮応力 ( $= P/A$ )  
 $\sigma_{ci}$  : 弾性範囲での座屈応力  
 $\sigma_{ck}$  : 塑性範囲での座屈応力  
 $\sigma_{ca}$  : 許容圧縮応力  
 $\sigma_k$  : 許容座屈応力  
 $\omega$  : 座屈係数

### 3. 座屈係数計算式の導入

座屈係数とは許容圧縮応力と許容座屈応力の比であり、 $\omega$  で表す。すなわち、

$$\omega = \sigma_{ca} / \sigma_k \quad (2)$$

である。従って、座屈係数を求めることは許容座屈応力を求めることと等価である。

JIS<sup>3)</sup> では、許容座屈応力は DIN<sup>4)</sup> にならい、①弾性座屈計算式による座屈応力  $\sigma_{ci}$  を安全率 2.5 で割った値、②塑性座屈計算式による座屈応力  $\sigma_{ck}$  を安全率 1.5 で割った値、のうちの小さい方をとることとしている。ここでもこれと同様の計算法を採用する。ただし、高張力鋼で細長比が小さい範囲では、この値が許容圧縮応力より大きくなることもあるが、その場合は、③許容圧縮応力をもって許容座屈応力とする。

最小値を意味する記号  $\text{MIN}\{ \}$  を用いて以上をまとめると、許容座屈応力は次式になる。

$$\sigma_k = \text{MIN}\{ \sigma_{ci}/2.5, \sigma_{ck}/1.5, \sigma_{ca} \} \quad (2)$$

#### 3.1 弾性座屈計算式による座屈応力

弾性座屈については次の Euler の式により座屈応力を計算する。

$$\sigma_{ci} = \pi^2 E / \lambda^2 \quad (3)$$

#### 3.2 塑性座屈計算式による座屈応力

塑性座屈応力は、以下の方法<sup>6)</sup> により求める。

はじめに、次の仮定を設ける。

仮定 1: 柱の材料は Fig. 1 に示すように、完全な弾塑性体であるとする。

仮定 2: 圧縮力は、Fig. 2 に示すように、柱の中心線より  $a$  だけ偏心して加えられるものとする。

仮定 3: 柱のたわみは正弦曲線で表されるものとする。

以上の仮定の下で柱に偏心した圧縮力を加えていくと、徐々にたわみが生じ、ついには柱の中央が降伏して圧縮側から塑性域が出現することになる。

このときの塑性域の範囲を考えると、 $\lambda$  が小さいう

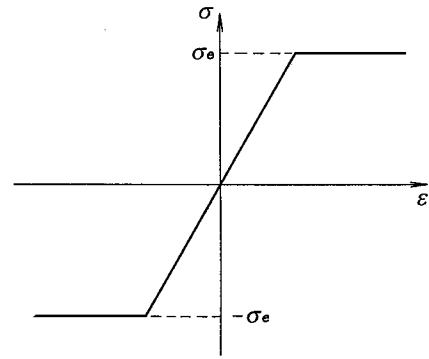


Fig. 1 Assumed stress-strain curve.  
応力-ひずみ曲線の仮定

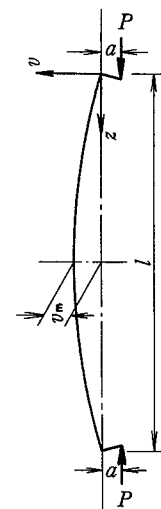


Fig. 2 Assumed column deflection and load eccentricity.  
柱のたわみと荷重偏心量の仮定

ち、すなわち座屈荷重が  $P$  よりも大きいうちは、塑性域はある範囲にとどまって、柱は  $P$  を支えることができ、塑性域の幅  $c$  も一義的に決定できる。しかし、 $\lambda$  が大きい場合、すなわち座屈荷重が  $P$  より小さい場合は、塑性域が無限に広がっても柱は  $P$  を支えることができない。 $\lambda$  がその限界に相当するとき、塑性域の範囲は不定になり、 $c$  は任意の値を取り得る。逆にいうと、 $\lambda$  が座屈限界に相当するとき、 $\lambda$  (あるいは  $\lambda$  の関数) を  $c$  で偏微分した値は零になる。

具体的な塑性座屈の計算は次の手順による。

- 断面のうち、塑性域の幅  $c$  を仮定する。
- たわみの式から柱の中央における曲率半径を求める。
- ひずみと曲線の関係から同じく曲率半径を求める。
- 圧縮力とモーメントのつり合いをとる。
- 上記を組み合わせて、(a) の条件 (塑性域の範囲が  $c$  である) になるために必要な細長比  $\lambda$  を求め

る。言い換えると、 $\lambda$ あるいは $\lambda$ の関数(ここでは $\lambda^2$ )を $c$ の式で表す。

- (f)  $\lambda^2$ が $c$ に対して極値をとるための条件式を求める。この時の $\lambda$ が座屈するときの限界の細長比である。逆に言うと、与えられた $\lambda$ において座屈する条件(座屈応力)は、この式を解けば求められる。

### 3.3 一般形状断面における塑性範囲での座屈応力

偏心圧縮力を加えられ、一部降伏した柱の断面の状態を模式的に Fig. 3 に示す。

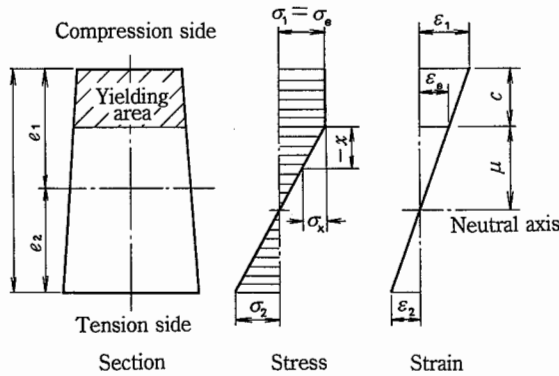


Fig. 3 A stress-strain condition of a column section.  
柱の断面の応力-ひずみ状態

以下において、前節で述べた手順(a)から(f)により一般断面形状の柱の座屈応力を求めると、

手順(a): 塑性域の幅を $c$ と仮定する。弾性域と塑性域の断面一、二次モーメントは以下のようなになる。

$$S_2 = \int_{A_2} x dA \quad (4)$$

$$I_2 = \int_{A_2} x^2 dA \quad (5)$$

$$S_1 = \int_{A_1} x dA = -A(e_1 - c) - S_2 \quad (6)$$

$$I_1 = \int_{A_1} x^2 dA = I - I_2 + A(e_1 - c)^2 \quad (7)$$

手順(b): 仮定3から、柱の中央におけるたわみを $v_m$ と置くと、柱の上端から $z$ の位置におけるたわみ $v$ は、

$$v = v_m \sin(\pi z/l) \quad (8)$$

であり、また、柱の曲率半径を $\rho$ とすると、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{dz^2} = -v_m \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}$$

であるから、柱の中央( $z = l/2$ )では、

$$\frac{1}{\rho_m} = -v_m \frac{\pi^2}{l^2} \quad (9)$$

となる。

手順(c): 曲率半径とひずみの関係式から、柱の中央において、

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{\epsilon_e}{\mu} \quad (10)$$

が成り立つ。これから

$$\frac{1}{\rho_m} = -\frac{\sigma_e}{E\mu} \quad (11)$$

となる。

手順(d): 柱の中央( $z = l/2$ )における圧縮力のつり合いから、

$$P = \int_A \sigma dA = A\sigma_e - \int_{A_2} \sigma_x dA \quad (12)$$

が成り立つ。また、Fig. 3 から $\sigma_x = -x\sigma_e/\mu$ であることがわかるので、これと式(4)、(5)を式(12)に代入して整理すると、

$$P = A\sigma_e + \frac{\sigma_e}{\mu} \int_{A_2} x dA = A\sigma_e + \frac{\sigma_e}{\mu} S_2 \quad (13)$$

となるので、これを $\mu$ について解くと、

$$\mu = \frac{S_2 \sigma_e}{P - A\sigma_e} = -\frac{S_2 \sigma_e}{A(\sigma_e - \sigma_m)} \quad (14)$$

となる。したがって

$$\sigma_m/\sigma_e = 1 + S_2/(A\mu) \quad (15)$$

また、柱の中央( $z = l/2$ )におけるモーメントのつり合いから、

$$M_m + Pe_2 = Ae_2\sigma_e - \int_{A_2} (h - c + x)\sigma_x dA \quad (16)$$

が成り立つ。 $M_m = P(v_m + a)$ であるので、これと式(4)~(7)を式(16)に代入して整理すると

$$\begin{aligned} & P(v_m + a) + Pe_2 \\ &= Ae_2\sigma_e \\ & - \{S_1 + A(e_1 - c)\}(h - c)\sigma_e/\mu \\ & + \{I - I_1 + A(e_1 - c)^2\}\sigma_e/\mu \end{aligned} \quad (17)$$

さらに式(15)を用いて式(17)を整理すると次式が得られる。

$$v_m + a = \frac{\sigma_e}{A\mu\sigma_m} \{I - I_1 - S_1(e_1 - c)\} \quad (18)$$

手順 (e) : 式 (9) と式 (11) を比較すると,

$$\frac{\sigma_e}{E\mu} = \frac{v_m \pi^2}{l^2}$$

であるから

$$v_m \mu = \frac{l^2 \sigma_e}{\pi^2 E}$$

これに式 (14) と式 (18) とを代入して整理すると,

$$\frac{l^2}{\pi^2 E} = \frac{I - I_1 - S_1(e_1 - c)}{A\sigma_m} - \frac{S_1 + A(e_1 - c)}{A(\sigma_e - \sigma_m)} a \quad (19)$$

ここで, 荷重の偏心量  $a$  と断面の図心から核の引張り側までの距離  $k_z$  との比を  $m$  とすると,

$$m = a/k_z = Aa/Z_1$$

であり, また, 細長比  $\lambda$  は

$$\lambda = l/\sqrt{I/A}$$

であるから, この2式を式 (19) に代入して整理すると次式が得られる。

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{I\sigma_m} \left[ I - I_1 - \frac{Z_1 m \sigma_m}{\sigma_e - \sigma_m} (e_1 - c) - S_1 \left\{ e_1 - c + \frac{Z_1 m \sigma_m}{A(\sigma_e - \sigma_m)} \right\} \right] \quad (20)$$

手順 (f) : 座屈限界では式 (20) を  $c$  で偏微分した値が零になるので

$$-\frac{\partial I_1}{\partial c} + \frac{Z_1 m \sigma_m}{\sigma_e - \sigma_m} - \frac{\partial S_1}{\partial c} \left\{ e_1 - c + \frac{Z_1 m \sigma_m}{A(\sigma_e - \sigma_m)} \right\} + S_1 = 0 \quad (21)$$

となる。

断面の形状が与えられたとき, 式 (21) を  $c$  について解き, 得られた解を式 (20) に代入することによって  $\sigma_m$  と  $\lambda$  との関係式が得られる。このときの  $\sigma_m$  は座屈限界における値であるので, 以下  $\sigma_{ck}$  と書くことにする。

### 3.4 T型断面における塑性範囲での座屈応力

塑性範囲の座屈では, 断面二次モーメントが同じであっても, 断面が偏っていて降伏域が生じ易いものほど座屈荷重が小さくなる。通常考えられる断面では, Fig. 4 に示す T型断面が座屈に関して最も不利なものと考えられる。以下において, この断面に対する座屈応力を計算する。

まず, 荷重の偏心量  $a$  は, DIN<sup>4)</sup> にならって次式で与えられるものとする。

$$a = i/20 + l/500 \quad (22)$$

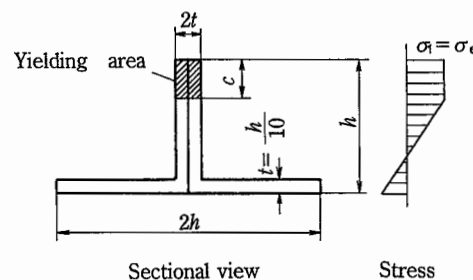


Fig. 4 A configuration of T-type section and stress condition.

T型断面の形状と応力状態

次に, 塑性域の幅  $c$  を Fig. 4 のように仮定する。

断面一次モーメントと断面二次モーメントは

$$I_1 = (2/3)tc^3$$

$$S_1 = tc^2$$

であるから

$$\partial I_1 / \partial c = 2tc^2$$

$$\partial S_1 / \partial c = 2tc$$

となる。これを式 (21) に代入して整理し,  $\sigma_m$  を  $\sigma_{ck}$  と書くと,  $c$  に関する次の2次方程式が得られる。

$$c^2 - 2 \left( \frac{Z_1 m \sigma_{ck}}{A(\sigma_e - \sigma_{ck})} + e_1 \right) c + \frac{Z_1 m \sigma_{ck}}{t(\sigma_e - \sigma_{ck})} = 0 \quad (23)$$

ここで

$$p = \frac{Z_1 m \sigma_{ck}}{A(\sigma_e - \sigma_{ck})} + e_1 \quad (24)$$

$$q = \frac{Z_1 m \sigma_{ck}}{t(\sigma_e - \sigma_{ck})} \quad (25)$$

とおいて, 式 (23) を解くと,

$$c = p \pm \sqrt{p^2 - q} \quad (26)$$

となる。式 (26) の  $\pm$  のうち,  $+$  は物理的に意味を持たないので  $-$  を採用し, これを式 (20) に代入して整理すると次式が得られる。

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{I\sigma_{ck}} \left[ I + \frac{t}{3} \left\{ -2p^3 + 2\sqrt{p^2 - q}^3 + 3q(p - e_1) \right\} \right] \quad (27)$$

続いて,

$$p - e_1 = qt/A \quad (28)$$

$$\sqrt{p^2 - q} = p^3 \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{q}{p^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{q}{p^2} \right)^2 + \frac{1}{16} \left( \frac{q}{p^2} \right)^3 + \dots \right] \quad (29)$$

の2式を用いて式(27)を変形すると、

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{ck}} \left[ 1 - \frac{1}{Z_1 e_1} \left( pqt - \frac{q^2 t}{4p} - \frac{q^3 t}{24p^3} - \frac{q^2 t^2}{A} \right) \right] \quad (30)$$

となる。ここで

$$\alpha = \frac{Z_1 m \sigma_{ck}}{A e_1 (\sigma_e - \sigma_{ck})} \quad (31)$$

なる変数を導入すると、

$$p = (1 + \alpha) e_1$$

$$q = A e_1 \alpha / t$$

であるから、式(30)は

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{ck}} \left[ 1 - \frac{m \sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} \left( 1 - \frac{A}{4e_1 t} \frac{\alpha}{1 + \alpha} - \frac{A^2}{24e_1^2 t^2} \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^3} \right) \right] \quad (32)$$

となる。更に次の級数展開をすると、

$$\frac{1}{1 + \alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1 + \alpha)^3} = 1 - 3\alpha + 6\alpha^2 - 10\alpha^3 + \dots$$

結局次式を得ることが出来る。

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{ck}} \left[ 1 - \frac{m \sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} + \frac{Z_1}{4e_1^2 t} \left( \frac{m \sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} \right)^2 - \frac{Z_1^2 (6e_1 t - A)}{24e_1^4 t^2 A} \left( \frac{m \sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} \right)^3 \right] \quad (33)$$

断面の形状から

$$\frac{Z_1}{4e_1^2 t} = 0.25 \quad (34)$$

$$\frac{Z_1^2 (6e_1 t - A)}{24e_1^4 t^2} = 0.0052 \quad (35)$$

と計算されるので、エーガの式<sup>3)</sup>として知られている次式が得られる。

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{ck}} \left[ 1 - \frac{m \sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} + 0.25 \left( \frac{m \sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} \right)^2 - 0.005 \left( \frac{m \sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} \right)^3 \right] \quad (36)$$

なお、 $m$  を具体的に求めると

$$m = aA/Z_1$$

$$= (e_1/i)(0.05 + \lambda/500) \quad (37)$$

$$= 2.317(0.05 + \lambda/500)$$

となる。

### 3.5 パイプ断面における塑性座屈応力

昭和51年の構造規格の改正で、管厚が外径の6分の1以下の鋼管に対する座屈係数が追加された。以下に、パイプ断面を有する柱の塑性範囲での座屈応力を求める。

内半径  $R$ 、管厚  $t$  のパイプ断面を有する鋼管柱に、圧縮荷重  $P$  が、 $a$  だけ偏心して負荷されているものとする。偏心量はT型断面柱のときと同じく式(22)で表されるものとする。

#### 3.5.1 塑性域の幅が管厚より狭い場合

断面の形状と応力状態をFig.5に示す。以下、 $\varphi$  をパラメーターとして解析を進めると、図から、

$$x = (R + t)(\cos \varphi_1 - \cos \varphi)$$

$$= R(1 + K)(\cos \varphi_1 - \cos \varphi) \quad (38)$$

であるので、

$$dx = R(1 + K) \sin \varphi d\varphi$$

$$dA = 2(R + t) \sin \varphi dx = 2R^2(1 + K) \sin^2 \varphi d\varphi$$

また

$$A = \pi R^2 \{(1 + K)^2 - 1\}$$

$$I = (\pi/4) R^4 \{(1 + K)^4 - 1\}$$

をもとに  $S_1$  と  $I_1$  を求めると

$$S_1 = 2R^3(1 + K)^3 \int_{\varphi_1}^{\pi} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$$= R^3(1 + K)^3 \{(\pi - \varphi_1) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_1\} \quad (39)$$

$$I_1 = 2R^4(1 + K)^4 \int_{\varphi_1}^{\pi} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$= R^4(1 + K)^4 \left\{ (\pi - \varphi_1) \left( \cos^2 \varphi_1 + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{4} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \frac{1}{6} \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 \right\} \quad (40)$$

また、 $m = Aa/Z_1$  から  $Z_1 m = Aa$  であるので、これと式(39)、(40)を式(20)に代入して整理し、 $\sigma_m$  を  $\sigma_{ck}$  と書くと

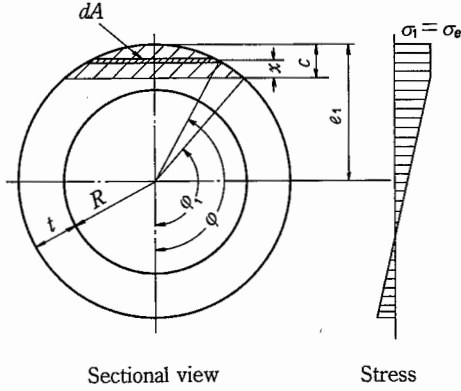


Fig. 5 A configuration of pipe section and stress condition, in case of yielding area is within the shell thickness.  
パイプ断面の形状と応力状態（塑性域の幅が管厚以下の場合）

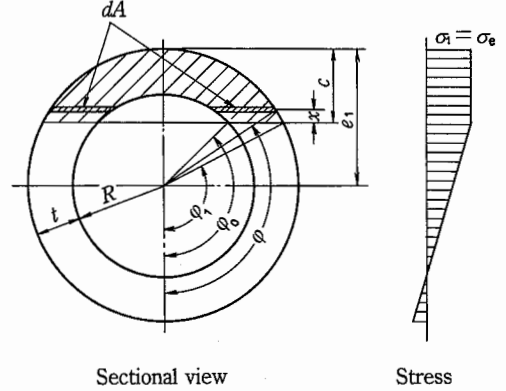


Fig. 6 A configuration of pipe section and stress condition, in case of yielding area is over the shell thickness.  
パイプ断面の形状と応力状態（塑性域の幅が管厚以上の場合）

$$\lambda^2 = \frac{\pi E}{K_0 \sigma_{ck}} \left[ (1+K)^4 (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1) - \pi + \frac{4a}{R} \frac{\sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} \left\{ (1+K)^3 (\varphi_1 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_1) - \pi(1+K) \cos \varphi_1 \right\} \right] \quad (41)$$

を得る。また、座屈限界ではこれを  $c$  で偏微分した値が零となるので、

$$\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial c} = \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial \varphi_1} / \frac{\partial c}{\partial \varphi_1} = 0 \quad (42)$$

である。これを具体的に求めると、式(41)から

$$\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial \varphi_1} = \frac{\pi E}{K_0 \sigma_{ck}} \left[ \frac{8}{3} (1+K)^4 \sin^4 \varphi_1 + \frac{4a}{R} \frac{\sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} \left\{ (1+K)^3 (-\varphi_1 \sin \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) + \pi(1+K) \sin \varphi_1 \right\} \right] \quad (43)$$

また、 $c = R(1+K)(1 + \cos \varphi_1)$  であるから

$$\partial c / \partial \varphi_1 = -R(1+K) \sin \varphi_1 \quad (44)$$

この両式を式(42)に代入して整理すると次の式(45)となる。

$$\frac{a}{R} \frac{\sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} = \frac{2}{3} \frac{(1+K)^3 \sin^3 \varphi_1}{(1+K)^2 (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) - \pi} \quad (45)$$

よって、細長比  $\lambda$  が与えられたとき、式(41)と式(45)を  $\varphi_1$  と  $\sigma_{ck}$  に関する連立方程式と考へて解けば座屈応力  $\sigma_{ck}$  を得ることが可能である。

### 3.5.2 塑性域の幅が管厚を超える場合

断面の形状と応力状態を Fig. 6 に示す。前項と同様に  $S_1, I_1$  と  $\lambda$  を求めると、

$$S_1 = R^3 (1+K)^3 \left\{ (\pi - \varphi_1) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_1 \right\} - R^3 \left\{ (\pi - \varphi_0) \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0 \right\} \quad (46)$$

$$I_1 = R^4 (1+K)^4 \left\{ (\pi - \varphi_1) \left( \cos^2 \varphi_1 + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{4} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \frac{1}{6} \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 \right\} - R^4 \left\{ (\pi - \varphi_0) \left( \cos^2 \varphi_0 + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{4} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{6} \sin^3 \varphi_0 \cos \varphi_0 \right\} \quad (47)$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi E}{K_0 \sigma_{ck}} \left[ (1+K)^4 \left( \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 \right) - \left( \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi_0 \cos \varphi_0 \right) + \frac{4a}{R} \frac{\sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} \left\{ (1+K)^3 (\varphi_1 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_1) - (\varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi_0) \right\} \right] \quad (48)$$

を得る。また、3.5.1 と同様に座屈限界では式 (48) を  $c$  で偏微分した値が零となるので、

$$\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial c} = \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial \varphi_1} \Big/ \frac{\partial c}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial \varphi_0} \Big/ \frac{\partial c}{\partial \varphi_0} = 0 \quad (49)$$

である。これらの項を式 (48) から具体的に求めると、次の 2 式が得られる。

$$\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial \varphi_1} = \frac{\pi E}{K_0 \sigma_{ck}} \left\{ \frac{8}{3} (1+K)^4 \sin^4 \varphi_1 + \frac{4a}{R} \frac{\sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} (1+K)^3 (-\varphi_1 \sin \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1) \right\} \quad (50)$$

$$\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial \varphi_0} = \frac{\pi E}{K_0 \sigma_{ck}} \left\{ \frac{8}{3} \sin^4 \varphi_0 + \frac{4a}{R} \frac{\sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} (1+K)^3 (-\varphi_0 \sin \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0) \right\} \quad (51)$$

次に、式 (44) は 3.5.1 の場合と同様に成立する。また、Fig. 6 より  $c = (R+t) + R \cos \varphi_0$  も成り立つので

$$\partial c / \partial \varphi_0 = -R \sin \varphi_0 \quad (52)$$

これらを式 (49) に代入して整理すると次の式 (53) となる。

$$\frac{a}{R} \frac{\sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} = \frac{2}{3} \frac{(1+K)^3 \sin^3 \varphi_1 - \sin^3 \varphi_0}{(1+K)^2 (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) - (\varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \varphi_0)} \quad (53)$$

最後に、Fig. 6 から

$$R \cos \varphi_0 = R(1+K) \cos \varphi_1 \quad (54)$$

であることが分かるので、細長比  $\lambda$  が与えられたとき、式 (48)、(53) と式 (54) を  $\varphi_0$ 、 $\varphi_1$  と  $\sigma_{ck}$  に関する連立方程式と考えて解けば座屈応力  $\sigma_{ck}$  が得られる。

### 3.6 塑性座屈応力の具体的な計算方法

#### 3.6.1 T 型断面柱の場合

T 型断面柱の場合は、 $\lambda$  が与えられると式 (37) から  $m$  が決定されるので、式 (36) は  $\sigma_{ck}$  のみを未知数とする方程式になる。これは Newton-Raphson 法により容易に解くことができる。

#### 3.6.2 パイプ断面柱の場合

パイプ断面柱では、座屈応力が最も小さくなる、管厚が外径の 1/6 の断面を計算の対象とする。この場合、 $t = R/2$  となるので、

$$K = t/R = 0.5$$

$$K_0 = (1+K)^4 - 1 = 4.0625$$

$$i = \sqrt{I/A} = (R/2) \sqrt{(1+K)^2 + 1} = 0.9014R$$

$$a/R = (a/i)(i/R) = 0.9014(0.05 + \lambda_{ck}/500)$$

となる。また、塑性域の幅が管厚未満の条件は

$$\cos^{-1}(-1/1.5) \cong 2.301 \leq \varphi_1 \leq \pi \quad (55)$$

である。

以上から、塑性範囲での座屈応力  $\sigma_{ck}$  は、

- (a)  $0 \leq \varphi_1 < 2.301$  (塑性域の幅が管厚以上) のときは式 (48)、(53)、(54) を連立させて解き、
- (b)  $2.301 \leq \varphi_1 \leq \pi$  (塑性域の幅が管厚未満) のときは式 (41)、(45) を連立させて解くことにより求められる。

具体的には、上式を組み合わせ、 $\varphi_1$  のみを独立変数とする関数  $f(\varphi_1)$  (式 (41) あるいは式 (48) の右辺から左辺の  $\lambda^2$  を減じたもの) の値  $F$  を以下の手順で計算する。

- ①  $\varphi_1$  が 2.301 を超えない場合、 $\varphi_0$  が存在するので、 $\varphi_0$  を計算する。
- ②  $\varphi_1$  の大きさに応じて式 (45) あるいは式 (53) の右辺の値を計算し、 $V$  と置く。
- ③ これにより式 (45) あるいは式 (53) は

$$\frac{a}{R} \frac{\sigma_{ck}}{\sigma_e - \sigma_{ck}} = V$$

となるので、これを解いた式 (56) により  $\sigma_{ck}$  を計算する。

$$\sigma_{ck} = V \sigma_e / (a/R + V) \quad (56)$$

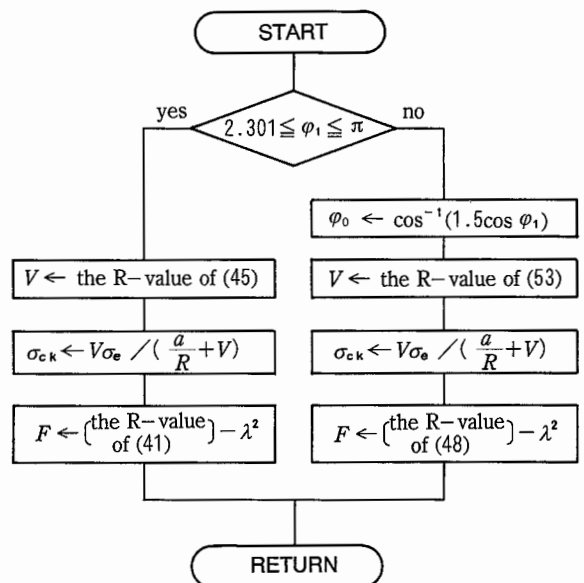


Fig. 7 A flow chart to calculate  $F$  from  $\varphi_1$ .  $\varphi_1$  から  $F$  を計算するフロー



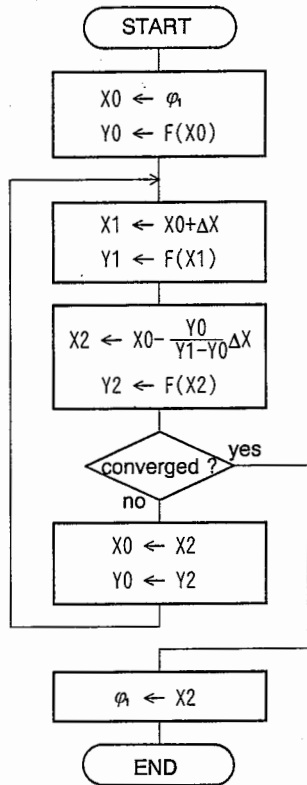


Fig. 8 A flow chart of Newton-Raphson method to solve  $F(\varphi_1) = 0$ .  
 $F(\varphi_1) = 0$  を解く Newton-Raphson 法の計算フロー

④  $\sigma_{ck}$ を式(41)あるいは式(48)に代入して関数  $f(\varphi_1)$  の値を計算する。

以上の手順で  $\varphi_1$  から  $F$  が計算できるので、逆に  $F$  の値を零とする  $\varphi_1$  を Newton-Raphson 法により求める。この計算フローを Fig. 7 及び Fig. 8 に示す。

最後に  $\varphi_1$  から  $\sigma_{ck}$  を求め、次式により座屈係数を計算する。

$$\omega = \sigma_{ca} / \text{MIN}\{\sigma_{ci}/2.5, \sigma_{ck}/1.5, \sigma_{ca}\} \quad (57)$$

#### 4. 鋼材の区分と座屈応力

##### 4.1 現行のクレーン及び移動式クレーン構造規格における鋼材の区分と定数

次に、現行の構造規格<sup>1),2)</sup> 及び通達に示された高張力鋼の  $\omega$  表から、それを計算するとき用いられた降伏点と許容圧縮応力の値を推定する方法について検討する。

まず、許容圧縮応力  $\sigma_{ca}$  については、一般に  $\lambda$  が大きくなると弾性範囲に入り、許容座屈応力は弾性座屈応力  $\sigma_{ci}$  によって決まることから、 $\lambda$  が大きいところでの  $\omega$  表の値について、

$$\sigma_{ca} = \omega \sigma_{ci} / 2.5 = \pi^2 E \omega / 2.5 \lambda^2 \quad (58)$$

Table 1 Values having been used for the calculation of the buckling coefficients.  
 座屈係数の計算に用いられていた定数

Steel grade	To calculate $\sigma_{ck}$		For general purpose <sup>*)</sup>
	Yield point $\sigma_e$	Allowable	compressive stress $\sigma_{ca}$
$\sigma_e \leq 2400$	2300	1400	$\leq 1412$
$2400 < \sigma_e \leq 3400$	3070	1900	1412 ~ 2000
$3400 < \sigma_e \leq 3800$	3400	2100	2000 ~ 2235
$3800 < \sigma_e \leq 4600$	4500	2700	2235 ~ 2706
70 kgf/mm <sup>2</sup> steel	6300	3200	3000 ~ 3200
80 kgf/mm <sup>2</sup> steel	6900	3500	3600

<sup>\*)</sup> In case of mobile cranes

Unit: kgf/cm<sup>2</sup>

を計算すればよい。

次に降伏点  $\sigma_e$  については、一般に  $\lambda$  が小さくなると塑性範囲に入り、許容座屈応力は塑性座屈応力  $\sigma_{ck}$  によって決まることから、 $\lambda$  が小さいところで1より大きい  $\omega$  の値をとり、

$$\sigma_{ck} = 1.5 \sigma_{ca} / \omega \quad (59)$$

を計算する。次に式(36)を  $m \sigma_{ck} / (\sigma_e - \sigma_{ck})$  に関する3次方程式と考えてこれを解き、その解を  $Y$  とすると、

$$\sigma_e = (m + Y) \sigma_{ck} / \omega \quad (60)$$

により  $\sigma_e$  が求められる。

以上の方法により各定数を求め、その値を用いて  $\omega$  の値を再計算したところ、小数2桁目の丸めの誤差の範囲内で  $\omega$  表の値と一致した。したがって、これによる推定値は実際に  $\omega$  表作成時に用いられた値であると考えられる。これらの逆算された値をまとめると Table 1 のようになり、これを見ると、座屈応力を計算する際に用いられた降伏点などの値は、必ずしも区分の境界の材料定数と一致していないことが分かる。

##### 4.2 鋼材の区分の提案値

これまで、移動式クレーン構造規格<sup>1)</sup> では、鋼材の許容応力は、引張り圧縮とも、降伏点  $\sigma_e$  の1/1.7とされ、また、クレーン構造規格<sup>2)</sup> では、許容引張り応力は  $\sigma_e$  の1/1.5、許容圧縮応力はその1/1.15とされてきた。これらにおいては70キロ級以上の高張力鋼の許容応力は個別に決められているが、JIS<sup>3)</sup> では引張り強さ  $\sigma_B$  の1/1.8を制限に加えることによって許容応力が決められている。

現在、構造規格においても JIS の方式にならひ、基

Table 2 A proposed classification of steels, and the values used for the calculation of the buckling coefficients.  
 新たな鋼材の区分の提案とその座屈係数の計算に用いられる定数

Steel grade	Yield point $\sigma_e$	Tensile strength $\sigma_B$	Typical kinds of steel
I $\sigma_e \leq 245$	245	400	SS400, SM400, STK400, STKM13A
II $245 < \sigma_e \leq 325$	325	490	SM490, STKM13B, STKM18A
III $325 < \sigma_e \leq 365$	365	520	SM520
IV $365 < \sigma_e \leq 460$	460	570	SM570
V $460 < \sigma_e \leq 575$	575	690	70 kg high tensile steel
VI $575 < \sigma_e \leq 620$	620	745	70 kg high tensile steel
VII $620 < \sigma_e \leq 685$	685	780	80 kg high tensile steel

Unit: MPa

本許容応力  $\sigma_a$  を、降伏点  $\sigma_e$  の 1/1.5 と引張り強さ  $\sigma_B$  の 1/1.8 のうちの小さい方の値とし、許容圧縮応力  $\sigma_{ca}$  は基本許容応力の 1/1.15 とする案が提案されている。すなわち、

$$\sigma_a = \text{MIN}\{\sigma_e/1.5, \sigma_B/1.8\} \quad (61)$$

$$\sigma_{ca} = \sigma_a/1.15 \quad (62)$$

である。

この許容応力の変更は、許容座屈応力そのものと直接の関係はないが、式(1)を見れば明らかなように、座屈係数の値には影響を与えるため、許容応力を変更した場合は座屈係数を再計算しなくてはならない。

また、前節で述べたように、座屈係数の計算に用いられている許容応力の値が、その鋼材の許容応力からずれたものとなっており、これを統一することが必要と思われる。鋼材の区分についても、よく使用される代表的な鋼材に合わせた区分とすることが望ましい。

これらの理由により、新たな鋼材の区分が提案されている。その区分と、それぞれの鋼材について、座屈係数の計算に用いられる降伏点、引張り強さの値、及び各区分の代表的な鋼種を Table 2 に掲げる。

Fig. 9 は使用される鋼材の降伏点と引張り強さの関係を表したもので、各区分を I から VII で示す。ここで  $\sigma_B = 780$  MPa を超えるか、あるいは  $\sigma_e = 685$  MPa を超える鋼材は通常の  $\omega$  表の対象とはならない。また、 $\sigma_B = \sigma_e$  の線より右下の範囲は降伏点より引張り強さが小さいことを意味するので、原理的に存在し得ない範囲である。

同一区分内の鋼材については同一の座屈係数を用いるため、計算に用いる値は区分内で座屈に対し最も安全側となる値を採用する。ただし、区分 VII では考えられる鋼材は 1 種類であるのでその値をとる。

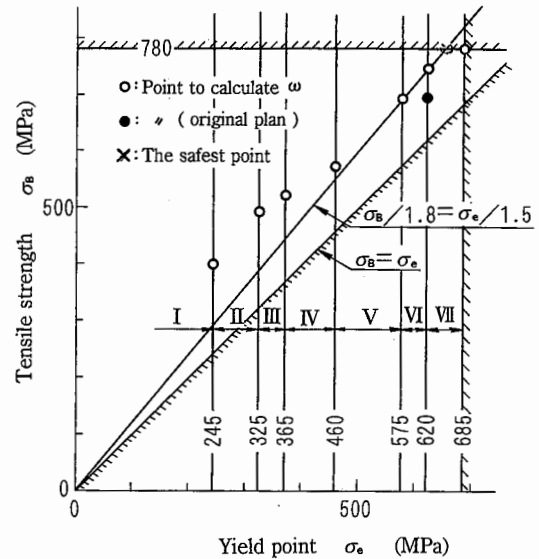


Fig. 9 Steel grades and their representative points to calculate the buckling coefficients.  
 鋼材の区分と座屈係数計算のための代表点

同一区分内の鋼材で、最も安全側の座屈係数を与える条件は、

- (a) 許容圧縮応力が最大であること
  - (b) その上で座屈応力が最小となること
- と考えられる。

このための条件を考察すると、

(ア)  $\sigma_B/1.8 = \sigma_e/1.5$  の線（以下許容応力境界線と呼ぶことにする）の下側の範囲にあつては、許容圧縮応力が引張り強さによって決定されるため、上方の点ほど大きな許容圧縮応力を与える。また、この範囲内では横軸に平行な方向は一定の許容圧縮応力となる。

(イ) 許容応力境界線の上側の範囲にあつては、許容圧縮応力が降伏点によって決定されるため、右方の点ほど大きな許容圧縮応力を与える。また、この範囲内では縦軸に平行な方向は一定の許容圧縮応力となる。

(ウ) 細長比が与えられたとき、弾性範囲における座屈応力  $\sigma_{ci}$  は、降伏点にも引張り強さにも影響を受けない。

(エ) 細長比が与えられたとき、塑性範囲における座屈応力  $\sigma_{ck}$  は、降伏点の大きい方が大きい。しかし、引張り強さは座屈応力の計算の過程で使用されないため、計算の上では座屈応力に影響しない。

以上の 4 点を考慮すると、区分 I から VI では、降伏点が最大で、かつ許容応力境界線より上方の位置が最も安全側の座屈係数を与える。この場合引張り強さの大きさは影響しない。

区分 VII では、降伏点が最大となる位置は許容応力境界線より下側になる。従つてこの点よりもその左の許容応力境界線上の方が、塑性範囲での座屈応力が小

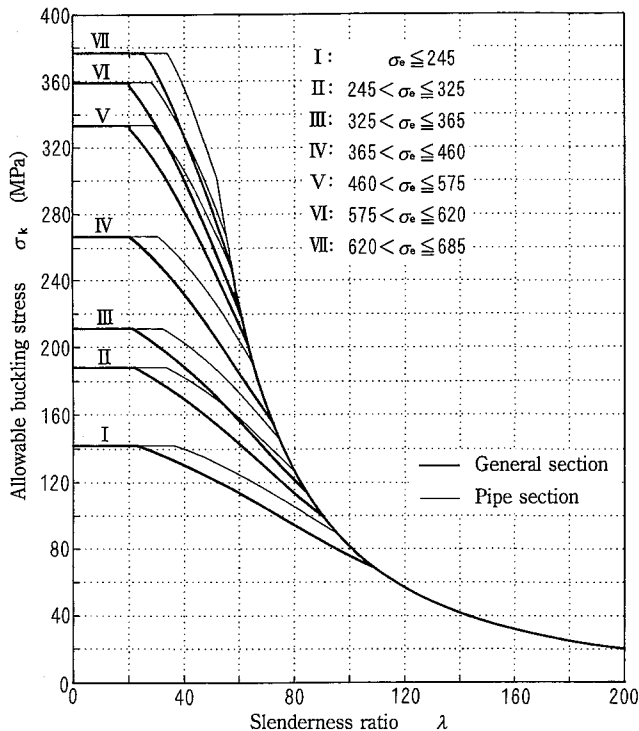


Fig. 10 Buckling curves of each steel grade.  
各区分の鋼材の座屈曲線

さくなるため、最も安全側の座屈係数を与える点になる。これを Fig. 9 に×印で示す。

以上の各区分において  $\omega$  表の計算に用いる定数を表す点を白丸で示す。

なお、70 キロ級高張力鋼は V と VI の 2 つの区分に分けられている。当初はこれを一つにして、Fig. 9 に黒丸で示した点の値を用いて座屈係数を計算する案であった。しかし、この点が許容応力境界線の下側にあり、最も安全側の値を与える点でないため、区分を 2 つに分割したものである。

#### 4.3 各種鋼材の座屈曲線

これまで述べた 7 種類の区分の鋼材について、許容座屈荷重を Fig. 10 にまとめて示す。図中、太線は一般形状断面の計算に用いる T 型断面の許容座屈荷重を、細線はパイプ断面の許容座屈荷重を示す。なお、細長比が 20 以下では座屈を考慮しなくてよいとされているため、その範囲の許容座屈応力は許容圧縮応力に等しく取って表示した。このため一部の鋼材では細長比  $\lambda = 20$  のところで線が不連続になっている。

この図から、弾性範囲と塑性範囲の境界が鋼材により  $\lambda = 55$  から 110 ほどの間に分布していることが分かる。また、塑性座屈では、パイプ断面の許容座屈応力が一般断面のそれに比べて 10~30 MPa ほど大きいことが分かる。また、弾性範囲の座屈応力は鋼材の種類によらず同一である。

#### 5. おわりに

以上、わが国のクレーン・移動式クレーン構造規格における座屈係数について、計算のもととなる理論とその解法を整理し、鋼材の区分、安全率の変更による座屈係数の変化について検討を行った。

もとより座屈現象には種々の構造不完全性が影響し、精密な計算と必ずしも一致した現象が生起するものではないが、長年の伝統ある計算手法により設計され、製造使用されてきたクレーンの実績には無視できないものがある。本報にまとめた結果がクレーンの構造安全性の進展に寄与できれば幸いである。

#### 謝 辞

座屈係数の計算式については、(社)日本クレーン協会内の移動式クレーン委員会及びその第一分科会席上における、日立建機(株)の伊藤一紀、住友建機(株)の笠美喜夫両氏の検討結果を参考にさせて頂いた。また、計算プログラムについては日立建機(株)の藤村和男氏の解析を参考にさせて頂いた。紙上を借りてお礼申し上げます。

#### 参考文献

- 1) 労働省告示第 80 号, クレーン構造規格 (1976).
- 2) 労働省告示第 81 号, 移動式クレーン構造規格 (1976).
- 3) JIS B 8821-1976 クレーン鋼構造部分の計算基準 (1976).
- 4) DIN 4114 Blatt 2 (1953).
- 5) 日本機械学会, クレーンがね構造部分計算基準 (1962).
- 6) G.Burgermeister, H.Steup: Stabilitätstheorie mit Erläuterungen zu DIN 4114 (1957).
- 7) 前田豊, クレーン等各構造規格の座屈係数について (1) (2), クレーン, 25 [10], [11] (1987).

(平成 7 年 7 月 30 日受理)