Research Reports of the Research Institute
of Industrial Safety, RIIS-RR-93, 1994
UDC 539.42:519.67:519.245

疲労き裂進展寿命の信頼性解析における確率因子の影響度評価

佐々木哲也*

Omission Sensitivity Study on the Reliability Analysis of Crack Growth Fatigue Life

by Tetsuya SASAKI*

Abstract; Fatigue crack propagation is a major factor that must be considered in the design and life prediction of industrial machines and structures. However, one finds that much of fatigue crack growth life data obtained using deterministic loadings in even tightly controlled laboratory setting exhibit a large amount of variability, and in these cases, deterministic approaches do not adequately evaluate crack growth fatigue life. Thus, the need to use probabilistic methods to predict fatigue crack growth in structures becomes evident, and in recent years, considerable attention has been given to the reliability analysis of crack growth life. In order to conduct the reliability analysis of crack growth fatigue life, the statistical properties of probabilistic factors such as initial crack size, crack growth rate, critical crack size *etc.* are needed. It is not realistic, however, to get so many statistical data because material tests often require so much time.

In this paper, omission sensitivity study is performed concerning probabilistic factors of material which apper in the reliability analysis of crack growth fatigue life. The omission sensitivity factors, proposed by Madsen, are formulted using the first order approximation technique. Comparing the approximated omission sensitivity factors with the accurate ones which are calculated using the computer reliability analysis code, the adequacy of this approximation is confirmed. The parametric studies on formulated omission sensitivity factors are also performed. It is shown that the factor which should be mainly treated as the probabilistic variable is initial crack size.

Keywords; Structural reliability, Failure probability, Omission sensitivity factor, Reliability index, Advanced first order second moment method, Sensitivity index, Crack growth fatigue life

1. 緒　言

産業界で使用される機械・構造物の破壊事故の多くは，何らかの形で疲労に起因しており[1]，破壊事故防止のためには疲労寿命の予測が重要である。しかし，全く同一の条件で疲労試験を行なっても疲労寿命は大きくバラつくことが知られている。このため，確定論的な寿命評価で十分な安全性を確保しようとすると，多くの場合，設計寿命が非常に短くなって経済的に受け入れられなくなってしまうという問題があった。そこで，各種の不確定因子を確率・統計論によって取り扱う構造信頼性工学の手法によって，疲労寿命予測を行なう試みが近年なされている[2]。構造信頼性工学の手法を用いると，破壊確率によって

*機械研究部 Mechanical Safety Research Division

破壊に対する信頼性が定量化できるため，適切な疲労寿命予測が可能になる。しかし，実際に信頼性解析を行なうには確率因子の統計量が必要になるため，膨大な量の材料試験データやフィールドデータを取得する必要がある。さらに，取り扱うべき確率因子の数が増えると，信頼性解析に要する時間・労力も膨大なものになるので，全ての確率因子を確率論的に，取り扱うことは事実上困難であるといえる。

ところが，幸いなことに疲労寿命を支配する全ての確率因子が等しく破壊確率に影響を及ぼしているわけではない[3]。破壊確率にほとんど影響を及ぼさない確率因子があればそれを確定論的に取り扱うことにより，信頼性解析に要する時間とコストを大幅に低減することが可能になる場合も多いと考えられる。しかし，従来は信頼性解析において，ある確率因子が破壊確率にどの程度の影響を及ぼしているかということを評価するためには，実際に数値シミュレーションなどの解析を行なう必要があり，専門的知識と膨大な解析時間が要求された。

そこで本研究では，疲労き裂進展寿命の信頼性解析に際して，初期き裂長さ（あるいは疲労発生寿命）のバラツキ，き裂進展速度のバラツキ，限界応力拡大係数のバラツキ等の材料側の確率因子に着目し，それらが破壊確率に及ぼす影響度を簡易評価するための指標を導出した。そして，この指標を用いてパラメータ・スタディを行なうことにより，疲労き裂進展寿命の信頼性解析に際して考慮すべき確率因子について検討を加えた。

2.　確率因子の影響度評価の手法

2.1　Omission sensitivity factor

n 次元の標準正規確率空間を $\boldsymbol{u}$，設計点を $\boldsymbol{u}_D$，そして ASOFM (Adavancet First Order Second Moment) 法[4] による信頼性指標を β とする。このとき，ある確率変数を確定値と見なした時に信頼性指標がどの程度変化するかを調べれば，その変数を確定値として取り扱っても良いか否かを判断できるはずである。omission sensitivity factor はこのための指標で，Madsen[5] によって提案されたものである。

ある基本変数 X_i に対する omission sensitivity factor, γ_i は，具体的には次のように定義される。すなわち，破損に関与する確率変数が X_j（平均値 μ_j，標準偏差 $\sigma_j; j=1,2,\cdots,n$）であり，これらは互いに独立であると仮定する。このとき，AFOSM 法による信頼性指標を β，ある基本変数 X_i を確定値とした時の信頼性指標を $\beta(\sigma_i=0)$ とすると，

$$\gamma_i = \frac{\beta(\sigma_i=0)}{\beta} \tag{1}$$

である。

いま，次式のような線形の限界状態曲面を考える。

$$g(\boldsymbol{X}) = a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j = 0 \tag{2}$$

この場合には，AFOSM 法の信頼性指標 β は，

$$\beta = \frac{\left| a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j \right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2}} \tag{3}$$

となる。したがって，基本変数 X_i の omission sensitivity factor γ_i は

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a_i^2\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2}}} \tag{4}$$

で表される。

2.2　Omission sensitivity factor と影響度指標の関係

次に，omission sensivitiy factor と構造信頼性工学において通常使用される影響度指標の関係について考察する。

n 次元の標準正規確率空間 $\boldsymbol{u}$ において，設計点が $\boldsymbol{u}_D$，信頼性指標が β で与えられる時，確率変数 u_i の不確かさが信頼性指標 β に及ぼす影響度の指標として，次のような影響度指標 α_i を用いることが多い[5]。

$$\alpha_i = \left.\frac{\partial \beta}{\partial u_i}\right|_{\boldsymbol{u}_D} \tag{5}$$

β が原点から設計点までの距離であることに注意すると，直ちに

$$\alpha_i = \frac{u_{iD}}{\beta} \tag{6}$$

が得られ，これから

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = 1 \tag{7}$$

となることがわかる。したがって，α_i^2 は u_i の不確かさが β に寄与する割合と考えることもできる。

さて，β が式 (3) で表される場合には，

$$\alpha_i = \frac{a_i \sigma_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2}} \tag{8}$$

となり，omission sensitivity factor γ_i は，α_i を用いて

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_i^2}} \tag{9}$$

と表すことができる。

3. 疲労き裂進展寿命の信頼性解析における omission sensitivity factor

き裂先端に生じる応力拡大係数の変動幅 ΔK がき裂の成長に従って緩やかにしか変化しない場合には，繰り返し荷重 N に対する疲労き裂進展速度 da/dN は Paris 則と呼ばれる疲労き裂進展則

$$\frac{da}{dN} = C_0 \left(\frac{\Delta K}{K_0}\right)^m \tag{10}$$

に従うことがこれまでの多くの研究によって明らかになっている[6]。ここで，K_0 は ΔK と同次元の定数であり，m, C_0 は材料定数である。ΔS なる応力変動幅によって生じるき裂先端の応力拡大係数の変動幅 ΔK は，線形破壊力学の知識により，近似的に

$$\Delta K = Y \Delta S \sqrt{\pi a} \tag{11}$$

で表されるものとする。ただし，Y は部材やき裂の形状によって決まる無次元定数である。

式 (10) を積分することにより，初期長さが a_0 のき裂が限界長さ a_c まで進展する時の寿命 N は，

$$N = \int_{a_0}^{a_c} \frac{1}{C_0} \left(\frac{\Delta K}{K_0}\right)^{-m} da \tag{12}$$

となる。

式 (12) のパラメータのうち，材料側に起因する確率因子は，初期き裂長さ a_0, 限界き裂長さ a_c 材料定数 m, C_0 である。しかし，これまでの研究によって m は確定値と見なしても，影響はほとんどないことがわかっている[7]。そこで，本研究では a_0, a_c, C_0 を確率変数と見なすことにする。ただし，同一き裂に対してはき裂の進展に従って C_0 は変化しないものとする。この場合には式 (12) が容易に積分できて，

$$N = \frac{2}{C_0(m-2)(Y\Delta S\sqrt{\pi})^m} \times \left(\frac{1}{a_0^{m/2-1}} - \frac{1}{a_c^{m/2-1}}\right) \tag{13}$$

となる。したがって，き裂が限界長さ a_c に達した時に破壊するものとすれば，限界状態曲面は，

$$a_c^{\frac{2-m}{2}} - a_0^{\frac{2-m}{2}} - \frac{2-m}{2}\left(\frac{Y\Delta S\sqrt{\pi}}{K_0}\right)^m NC_0 = 0 \tag{14}$$

となる。

式 (14) は，a_0, a_c に関して線形ではないが，

$$X_1 = a_c^{\frac{2-m}{2}} \tag{15}$$

$$X_2 = a_0^{\frac{2-m}{2}} \tag{16}$$

を近似的に互いに独立な正規確率変数と見なすと，これらについては線形の限界状態面となる。よって，式 (4) から，X_1, X_2, C_0 についての omission sensitivity factor がそれぞれ以下のように容易に求まる。

$$\gamma[X_1] = \sqrt{1 + \frac{\sigma_{X_1}^2}{\sigma_{X_2}^2 + a_3^2\sigma_{C_0}^2}} \tag{17}$$

$$\gamma[X_2] = \sqrt{1 + \frac{\sigma_{X_2}^2}{a_3^2\sigma_{C_0}^2 + \sigma_{X_1}^2}} \tag{18}$$

$$\gamma[C_0] = \sqrt{1 + \frac{a_3^2\sigma_{C_0}^2}{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2}} \tag{19}$$

ここで，

$$a_3 = \frac{2-m}{2}\left(\frac{Y\Delta S\sqrt{\pi}}{K_0}\right)^m N \tag{20}$$

である。

X_1, X_2 の標準偏差 $\sigma[X_1]$, $\sigma[X_2]$ は，一次近似[8]によって a_c, a_0 の平均値，$E[a_c]$, $E[a_0]$, $\sigma[a_c]$, $\sigma[a_0]$ から次式のように評価できる。

$$\sigma\left[a_c^{\frac{2-m}{2}}\right]^2 \simeq \left(\frac{2-m}{2}\right)^2 E[a_c]^{-m}\sigma[a_c]^2 \tag{21}$$

$$\sigma\left[a_0^{\frac{2-m}{2}}\right]^2 \simeq \left(\frac{2-m}{2}\right)^2 E[a_0]^{-m}\sigma[a_0]^2 \tag{22}$$

Table 1　Statistical properties of basic variables.
基本変数の統計的特性

Variable	Distribution type	Mean	C.O.V.
a_c	Normal	3.0×10^{-2}m	0.0～0.1
a_0	Log Normal	3.0×10^{-3}m	0.0～0.1
C_0	Log Normal	3.0×10^{-4}	0.0～0.1

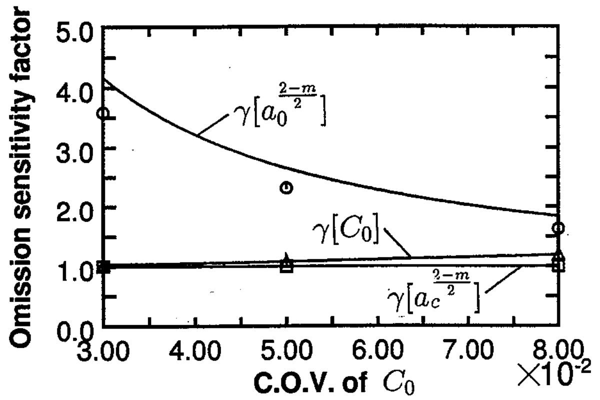

Fig. 1　Comparison between accurate omission sensitivity factors and approximated ones.
正確な omission sensitivity factor と近似式による評価結果との比較

4.　解析例

ここでは，まず，前章で定式化した疲労き裂進展寿命の信頼性解析における材料側の確率因子についての omission sensivitity factor の妥当性を検討する。次に，パラメータ・スタディを行ない疲労き裂進展寿命の信頼性解析における材料側の確率因子の影響度を評価する。

4.1　解析条件

Cr-Mo-V 鋳鋼を用いたき裂進展実験の結果[9]を基に，$\Delta S = 59.4$ MPa, $K_0 = 17.6$ MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$, $m = 4.0$, $N = 7 \times 10^2$ とする。そして，この解析の目的が材料側の確率因子の相対的な影響度を評価することであることを考慮し，簡単のため $Y = 1$ とした。また，a_c, a_0, C_0 の分布形状，平均値，ならびに変動係数 (C.O.V.) は Table 1 に示すように仮定した。

4.2　一次近似の妥当性の検討

式 (17)～(19) はあくまで近似式であるから，その妥当性を評価しておく必要がある。そこで，既に開発済みの重み付きモンテカルロ法による破壊確率評

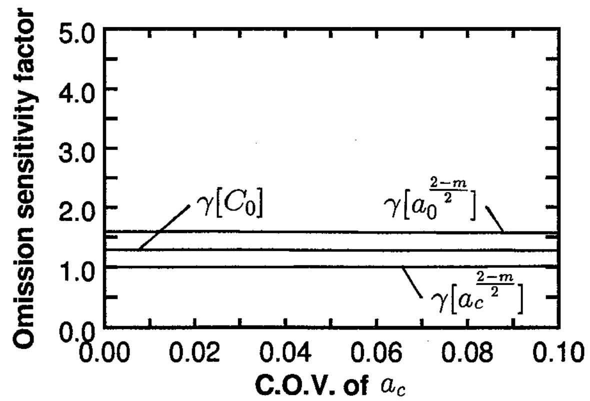

Fig. 2　C.O.V. of a_c vs. omission sensitivity factors.
a_c の変動係数を変化させた時の omission sensitivity factor

価システム[10]によって，確率変数の分布形状を考慮した正確な omission sensivitity factor を算出し，式 (17)～(19) と比較してみる。重み付きモンテカルロ法による破壊確率評価システムでは，離散的な評価しかできないため，a_c の変動係数は 0.05, a_0 の変動係数は 0.1 に固定し，C_0 の変動係数が 0.03, 0.05, 0.08 の 3 つの場合について，解析を行なった。Fig. 1 に解析結果を示す。図中の実線は式 (17)～(19) によって算出した omission sensivitity factor である。一方，○，□，△は破壊確率評価システムによって計算した信頼性指標から算出した omission sensitivity factor である。両者はほぼ一致しており，式 (17)～(19) によって，a_c, a_0, C_0 のバラツキが破壊確率に及ぼす影響度が評価できることがわかる。

なお，破壊確率が小さくなるほど分布形を考慮していないことによる誤差は大きくなるので，式 (17)～(19) は任意の場合に有効というわけではないが，破壊確率が 10^{-10} 程度以上であれば影響度評価という目的は十分達成できるようである。

4.3　パラメータ・スタディ

ここでは，各確率因子の変動係数を大きく変化させた場合の omission sensivitiy factor を評価し，疲労き裂進展寿命評価の信頼性解析における各確率因子の影響度を評価する。

解析は次の 3 通りについて行なう。

1)　a_0, C_0 の変動係数をともに 0.05 に固定し，a_c の変動係数を 0.0～0.1 の間で変化させる。

2)　a_c, C_0 の変動係数をともに 0.05 に固定し，a_0

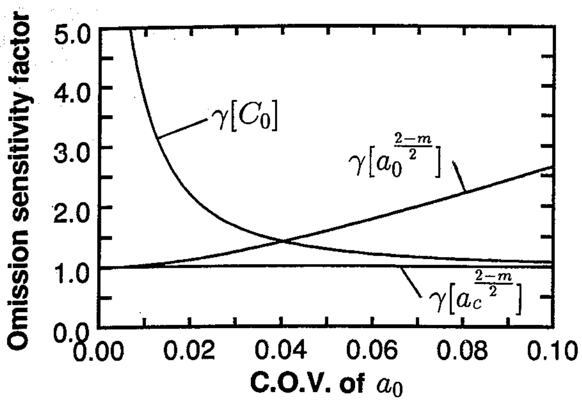

Fig. 3 C.O.V. of a_0 vs. Omission sensitivity factors. a_0 の変動係数を変化させた時の omission sensitivity factor

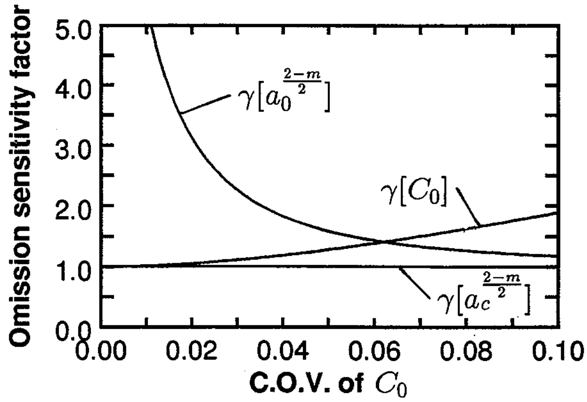

Fig. 4 C.O.V. of C_0 vs. Omission sensitivity factors. C_0 の変動係数を変化させた時の omission sensitivity factor

の変動係数を 0.0～0.1 の間で変化させる。

3) a_c, a_0 の変動係数をともに 0.05 に固定し，C_0 の変動係数を 0.0～0.1 の間で変化させる。

Fig. 2～Fig. 4 は，それぞれ上記 1)～3) の解析結果である。

これらのグラフから次のことがわかる。

- a_c のバラツキはほとんど破壊確率に影響を及ぼさない。
- a_0 のバラツキと C_0 のバラツキとでは，a_0 のバラツキの方が破壊確率に対する影響度が大きい。通常は，a_0 の変動係数の方が C_0 の変動係数よりも大きいから，C_0 をあえて確率変数として取り扱う必要性は小さいと考えられる。

5. 結　論

疲労き裂進展問題の信頼性解析における確率因子の影響度を評価するために，Madsen が提案した omission sensitivity factor を定式化するとともに，パラメータ・スタディを行なった。本研究で得られた結論は以下の通りである。

(1) 疲労き裂進展問題における材料側の確率因子について，Madsen の提案した omission sensitivity factor を一次近似によって定式化した。

(2) 重み付きモンテカルロ法を用いた破壊確率評価システムを用いて正確な omission sensitivity factor を評価し，一次近似によって定式化した omissin sensitivity factor の妥当性を確認した。

(3) Cr-Mo-V 鋳鋼の疲労き裂進展実験データを基にして，omission sensitivity factor のパラメータ・スタディを行なった。その結果，材料側の確率因子としては，初期き裂長さのバラツキの影響が最も大きく，き裂進展速度や限界き裂長さを確率変数として取り扱う必要性は小さいことが明らかになった。

(平成 6 年 4 月 28 日受理)

参 考 文 献

1) 矢川編，破壊力学，(1988), 85～110, 培風館.

2) 岡村・板垣，強度の統計的取り扱い，(1979), 196～197, 培風館.

3) 吉村・矢川・飯田・確率論的破壊力学のベンチマーク解析，日本機械学会講演論文集，900–59, A, (1990), 374～377.

4) Hasofer, A. M. and Lind, N., An Exact and Invariant First Order Reliability Format, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, 100-EM1 (1974), 111～121.

5) Madsen, H. O., Omission Sensitivity Factors, Structural Safety, 5, (1988), 35～45.

6) Paris, P. C. and Erdogan, F., A Critical Analysis of Crack Propagation Law, Trans. ASME, J. Basic Eng., 85, (1963), 528～534.

7) 佐々木・酒井，パリス則の定数 C と m の相関とその信頼性解析への影響，日本機械学会講演論文集，930-9, A, (1993), 795～797.

8) 市川，構造信頼性工学，(1988), 143～145, 海文堂.

9) 佐々木・酒井・岡村，疲労き裂進展抵抗のスペクトル解析と疲労き裂進展寿命分布評価への応用，日本機械学会論文集，57–536，A，(1991)，733〜740.

10) 佐々木，AFOSM 法と重み付きモンテカルロ法を併用した構造物の破壊確率評価システムの開発，産業安全研究所研究報告，RIIS-RR-92 (1993)，11〜17.