NOVEMBER 1977

RIIS-RR-26-3

UDC 614.8-02

産業安全研究所研究報告

RESEARCH REPORT OF
THE RESEARCH INSTITUTE OF INDUSTRIAL SAFETY

RR-26-3

災害発生間隔の分布に関する研究

花　安　繁　郎

労働省産業安全研究所
MINISTRY OF LABOUR
THE RESEARCH INSTITUTE OF INDUSTRIAL SAFETY

災害発生間隔の分布に関する研究

花 安 繁 郎*

A Study on the Time Intervals between Industrial Accidents

Shigeo HANAYASU*

In many industrial areas, the accident frequency rate (the number of injuries per million employee-hours of exposure) is often used as a measurement of safety performance. However this measurement has been thought neither stable nor sensitive to changes in system input and also has dubious reliability. Another important drawback is that this measurement requires accidents to occur before it can be calculated.

n routine accident control it is necessary for a manager or safety committee to have the earliest possible indication of a significant change in the accident situation.

This paper deals with the time intervals between industrial accidents in the hope of establishing its usefulness as a measurement of safety performance and calculating the probabilty of whether the accidents will occur or not at a given time T for one industrial place having a certain accident risk.

If some events are taking place at random in time and the expectation of events per unit time is constant, then the frequency of occurrence of events in fixed intervals of time have Poisson distribution and the time intervals between events are exponentially distributed.

In the previous paper, the auther described that the frequency distribution of fatal accidents in one day in the Tokyo Metropolitan area in the year of 1973 had distributed as Poisson distribution so that Exponential distribution could be used as the time intervals between industrial accidents.

In calculating the probability of exponential distribution, the parameter λ of exponential distribution in Equ. 1 (the reciprocal number of the expectation per unit time) may be estimated using accident frequency rate in the form Equ. 2. Then the probability whether an accident will occur or not within the given time t for a certain accident frequency rate could be calculated by Equ. 3 or 4. (See Fig. 1 & 2) Also tests may be applied to discover whether there is any significant tendency for changing accident situation in succeeding intervals of time by the help of Fig. 3.

It may be shown that if the time intervals are exponentially distributed, the sum of k intervals becomes Gamma distribution (Equ. 7). Then the probability whether k accidents will occur or not within the particular time T for a certain accident frequency rate can also be analyzed similarly as exponential distribution. (Fig. 5～12)

Consider the problem that when an industrial area has some industrial groups in which each group has its own proper accident rate, what shall the collective time intervals between accidents become? (Fig. 15) In conclusion, the collective time intervals result in the same form exponential distribution

* 土木建築研究部 Civil Engineering & Construction Research Division

as shown in Equ. 14 to 16. In these equations the parameter as a whole is required to total together all the groups' accident frequency rates. All of the graphs and tables used up to this point could be used for this problem in the same manner.

When the information concerning accidents such as the number of occurrences and the time the accidents taking place are given, interval estimation of accidenct frequency rate can be conducted. Namely the mean of k intervals, say $\bar{t}$, comes to be Erlang distribution (Equ. 29, Fig. 20, 21) and it follows from Erlang distribution that $2k\lambda\bar{t}$ are distributed as χ^2 distribution with the degree of freedom $\phi=2k$. This indicates an existing χ^2 distribution table may be employed in accident interval analysis. As shown in Equ. 31 or 32, $\bar{t}$ may be used to provide confidence intervals for an unknown value of A (frequency rate) as well as λ. (Fig. 19, 22) If the accident frequency rate of an industrial area which is already known and defined as an a priori frequency rate, say Ac, is given then the possibility that the frequency rate at the time when an accident happens will be smaller or larger than Ac could be calculated by Equ. 24 and 25 respectively. (Fig. 17, 18)

As conclusions in this study, the time intervals between industrial accidents seemed to be useful as a meaurement of safety performance. They can be used especially as an earlier indication of changes of the accident situation. The fact that interval estimation of frequency rate using time intervals could be conducted would probably be the most useful for safety management.

1. 緒　　言

現在事業所などで安全管理を行なう際に，安全水準の評価として世界的に最も広く利用されている算定式は，単位時間当り（例えば日本：100 万労働時間，英国：10 万労働時間）の災害発生件数で示される，所謂度数率，或いは労働者 1,000 人当りの災害発生人数である災害千人率などである。これらは何れも，或る期間において発生した災害数を，基準の労働時間または労働力に相当する災害数に換算して，当該事業所の安全水準を測定しようとするものである。

ところで，安全水準の評価には，上記の単位労働時間，或いは単位労働力当りの災害発生数による算定方法ばかりでなく，災害の発生間隔の時間数を評価することによっても可能であると考えられる。既に英国において，A. H. A. Wynn 等により鉱山災害を例に，異なった時期の災害発生率の相違を，災害発生間隔の分布を用いて，検定を行なった例があり[1]，また最近筆者は，度数率と或る時間無災害である確率との関係を調べて数表化し，災害発生間隔の時間数が，安全管理上の目安として利用出来ることを述べた[2]。

本研究は，これまで検討を行なってきた個々の災害の発生間隔の分布を更に発展させ，複数個の災害が発生するまでの時間の分布，および幾つかの集団内で，それぞれ独立に災害が発生している時，集団全体としての発生間隔の分布式を求め，これらの利用の便宜を図るため，確率計算値の図表化を行なった。更に災害発生間隔と度数率との関係を検討し，災害発生件数と発生時間数が与えられた時，度数率の信頼区間を求める方法についても論じた。

2. 災害発生間隔の分布式

2.1 個々の災害の発生間隔の分布[2]

実際の災害の発生間隔の分布を，多数調査した例は余り多く見当らないが，もし災害がどの時間帯でも等しい発生確率を有し，相互に独立して発生するランダムな事象であるとするならば，災害のように比較的稀にしか起こらない事象での一定期間中の発生数の分布はポアソン分布（Poisson distribution）に従い，個々の災害発生間隔の分布は指数分布（Exponential distribution）となることが知られている。またポアソン分布と指数分布は，同一事象を発生件数から見た場合と，発生間隔から見た場合とに，観点を変えて記述したものであるから，或る事象が一方を満足しておれば，他方の分布式も同様に満足していることも知られている。筆者は 1973（昭和 48）年の東京都における死亡災害を例に，その発生数の分布がポアソン分布に従うこと，即ち災害発生間隔の分布が指数分布であることを示した[2]。

さて，個々の災害の発生間隔の分布式である指数分布は，分布の平均値をパラメーターとした関数式で表現されており，このパラメーターをどの様に推定するかが，分布式によって確率を計算する際に，非常に重要な問題となってくる。ここではこのパラメーターを，災害度数率（Accident Frequency Rate，以下 A と略す）を用いて推定し，以下に述べる手順で，個々の災害の発生間隔の確率分布の計算を行なった。まず指数分布の一般式として，

$$f_1(t)=\lambda e^{-\lambda t} \qquad (1)$$

$$E_1(t)=\frac{1}{\lambda},\quad V_1(t)=\frac{1}{\lambda^2}$$

$f_1(t)$：災害発生間隔分布の確率密度関数

$1/\lambda$：平均災害発生間隔

λ の推定値として度数率を用いる。度数率とは災害の発生頻度を示す指標のことで，

$$\text{度数率}(A)=\frac{\text{災害発生件数}}{\text{延労働時間数}}\times 1,000,000$$

で示される 100 万労働時間当りの災害発生件数であるので，単位を万時間として，平均災害発生間隔から

$$\lambda=\frac{A}{100} \qquad (2)$$

を得，これを λ の推定値とする。

(1) 式を時間 t で積分し，(2) 式を代入すると，或る度数率 A に対して，任意の時間 t 以内で災害が発生する確率，および t 時間以内では発生しない確率，即ち災害の発生時間が少くとも t 時間以上である確率が，それぞれ (3)，(4) 式によって示される。

$$F_1(t)=\int_0^t f_1(t)\,dt=1-e^{-(A/100)t} \qquad (3)$$

$$R_1(t)=\int_t^\infty f_1(t)\,dt=1-F_1(t)=e^{-(A/100)t} \qquad (4)$$

従って，事業所等での度数率が分かれば，(3)，(4) 式によって，或る特定時間内で災害が発生する，または発生しない確率を求めることが出来る。特に無災害

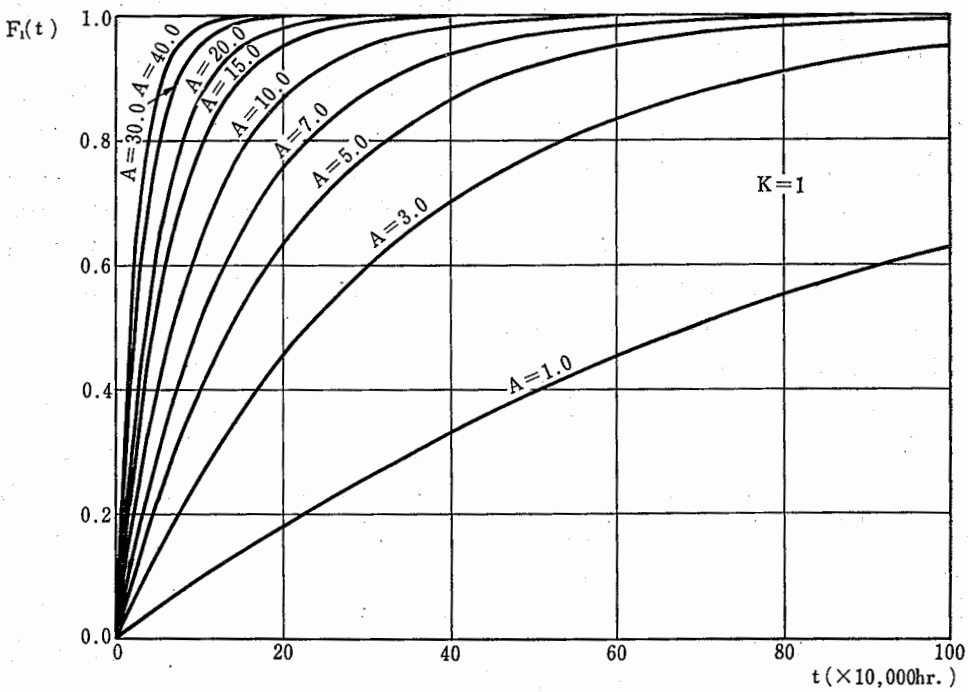

Fig. 1 Probability distribution function of Exponential distribution (Equ. 3). Each curve shows the probability that an accident will occur within the arbitary time t corresponding to the Accident Frequency Rate
指数分布確率分布関数

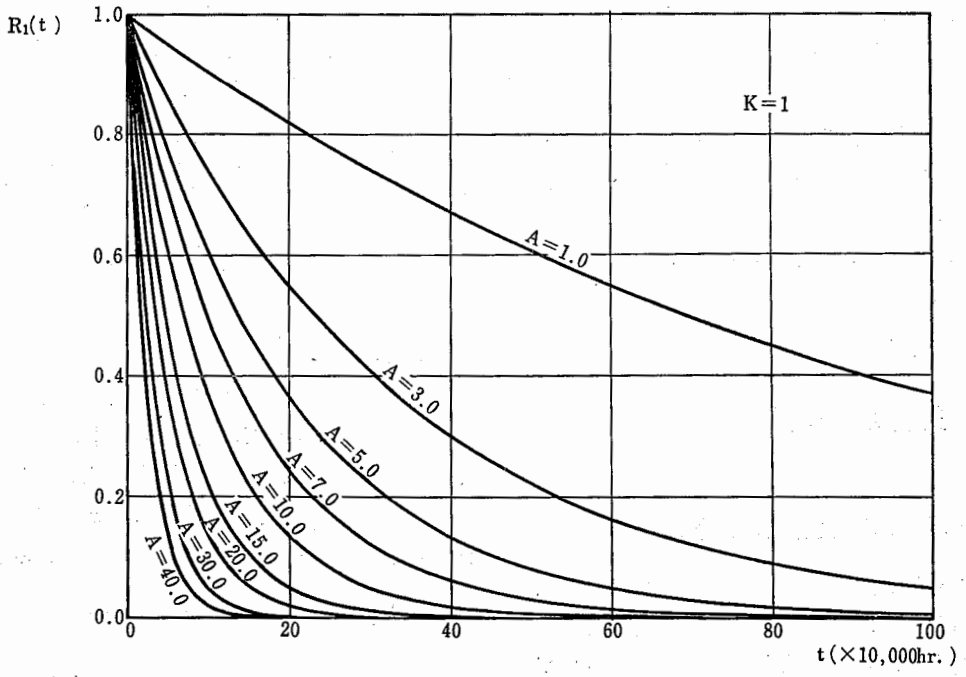

Fig. 2 Probability distribution function of Exponential distribution (Equ. 4). Each curve shows the probability that an accident will occur beyond the arbitary time t corresponding to Accident Frequency Rate
指数分布確率分布関数

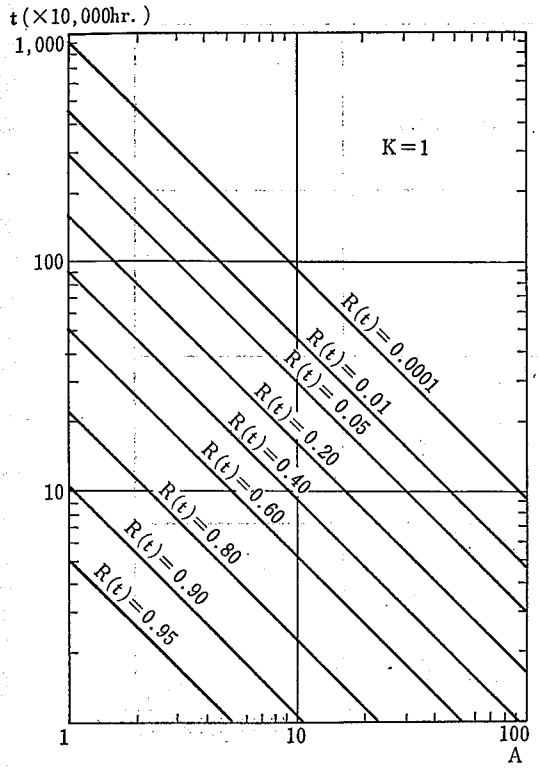

Fig. 3　Relation between $R_1(t)$, t, and Accident Frequency Rate
$R_1(t)\sim t\sim A$ の関係

記録のように，或る特定時間内で災害が起こらなかったことの評価には (4) 式が有効である。**Fig.** 1 には (3) 式の分布関数，即ち或る時間 t 以内で災害が発生する確率を，また **Fig.** 2 には (4) 式による災害発生時間が t 時間以上である確率を，種々の度数率に対して求めた値を示した。更に，或る時間災害の起こらない，所謂無災害である確率 $R_1(t)$ の具体的数値に対する時間数 t と，度数率 A との関係を **Fig.** 3 に示した。同図には，統計学上多く用いられている 5%，1% 危険率（今の場合，災害発生時間が t 時間以内でない確率）に対する t と A の関係も示してあるので，事業所などにおける安全管理計画の際に，度数率の変化に応じて，目安としての無災害時間を設定することが出来ると思われる。

2.2　複数個の災害の発生時間の分布

前節では個々の災害発生間隔，即ち 1 つの災害が発生した後，次の災害が発生する迄の時間の分布であったが，ここでは更に一般化された発生時間の分布，即ち 1 つの災害が起こった後，複数個の災害が発生する迄の時間の分布について検討する。

個々の災害の発生間隔の分布が指数分布に従う時，或る時点から k 番目の災害が発生する迄の時間の分布は，k 個の指数分布の和の分布として，次の如く求められる。まず，k 番目の災害までのそれぞれの発生間隔を $t_1, t_2, \cdots t_k$ とすると，$T_k=t_1+t_2+\cdots+t_k$ の分布関数は，

$$P_r(T_k<T)=F_k(T)$$

$$=\int_0^T\int_0^{T-t_1}\cdots\int_0^{T-t_1\cdots t_{k-1}}\lambda^k e^{-\lambda(t_1+t_2+\cdots+t_k)}dt_k\,dt_{k-1}\cdots dt_2dt_1$$

$$=-\frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda T}+\int_0^T\int_0^{T-t_1}\cdots\int_0^{T-t_1-\cdots-t_{k-2}}\lambda^{k-1}e^{-\lambda(t_1+t_2+\cdots+t_{k-1})}dt_{k-1}\,dt_{k-2}\cdots dt_2dt_1$$

$$=-\frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda T}-\frac{(\lambda T)^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda T}+\int_0^T\int_0^{T-t_1}\cdots\int_0^{T-t_1-\cdots-t_{k-3}}\lambda^{k-2}e^{-\lambda(t_1+t_2+\cdots+t_{k-2})}dt_{k-2}\cdots dt_1$$

$$\vdots$$

$$=-\frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda T}-\frac{(\lambda T)^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda T}-\cdots-\frac{(\lambda T)^2}{2!}e^{-\lambda T}-(\lambda T)e^{-\lambda T}+\int_0^T\lambda e^{-\lambda t_1}dt_1$$

$$=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda T)^i}{i\,!}e^{-\lambda T} \qquad (5)$$

$$=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(\frac{A}{100}T\right)^i}{i\,!}e^{-(A/100)T} \qquad (5)'$$

(5) 式は，時間 T までに k 個の災害が発生する確率を与え，また k 個の災害が発生する時間が，少くとも T 時間以上である確率は，(6) 式によって与えられる。

$$P_r(T_k>T)=R_k(T)$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda T)^i}{i\,!}e^{-\lambda T} \qquad (6)$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(\frac{A}{100}T\right)^i}{i\,!}e^{-(A/100)T} \qquad (6)'$$

(5) 式は分布関数であるので，確率密度関数は同式を T で微分して，

$$\frac{dF_k(T)}{dT}=f_k(T)=\frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda e^{-\lambda T} \qquad (7)$$

$$=\frac{\left(\frac{A}{100}T\right)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{A}{100}\cdot e^{-(A/100)T} \qquad (7)'$$

$$E_k(T)=\frac{k}{\lambda},\quad V_k(T)=\frac{k}{\lambda^2}$$

一般に，上記の指数分布の和の分布は，ガンマ分布

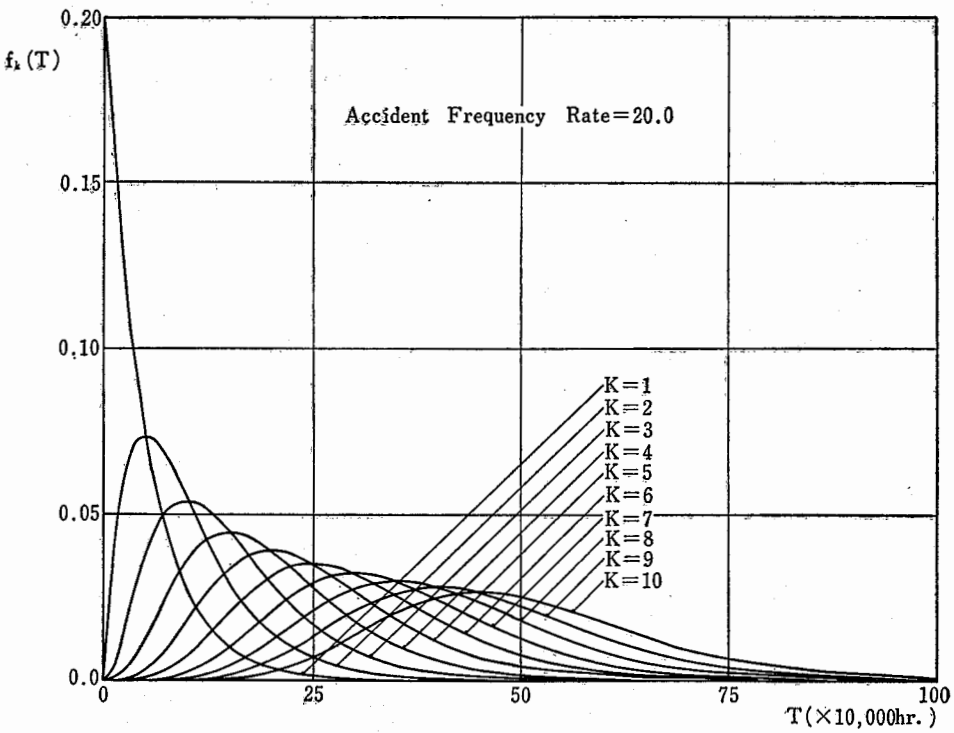

Fig. 4 Probability density function of Gamma distribution
(A=20.0, K=1～10 ; Equ. 7′)
ガンマ分布確率密度関数

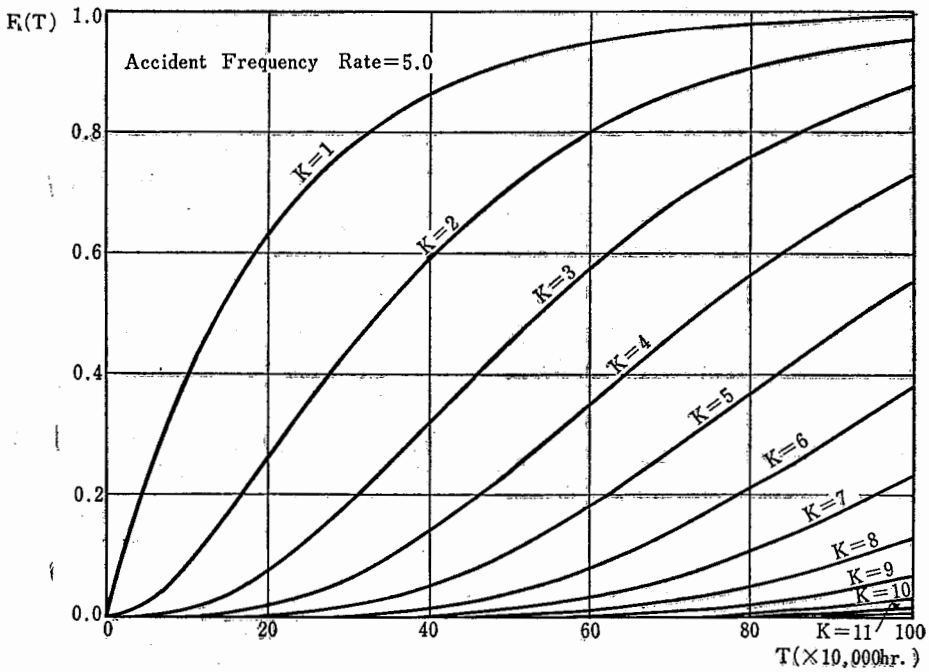

Fig. 5 Probability distribution function of Gamma distribution
(A=5.0, K=1～12 ; Equ. 5′)
ガンマ分布確率分布関数

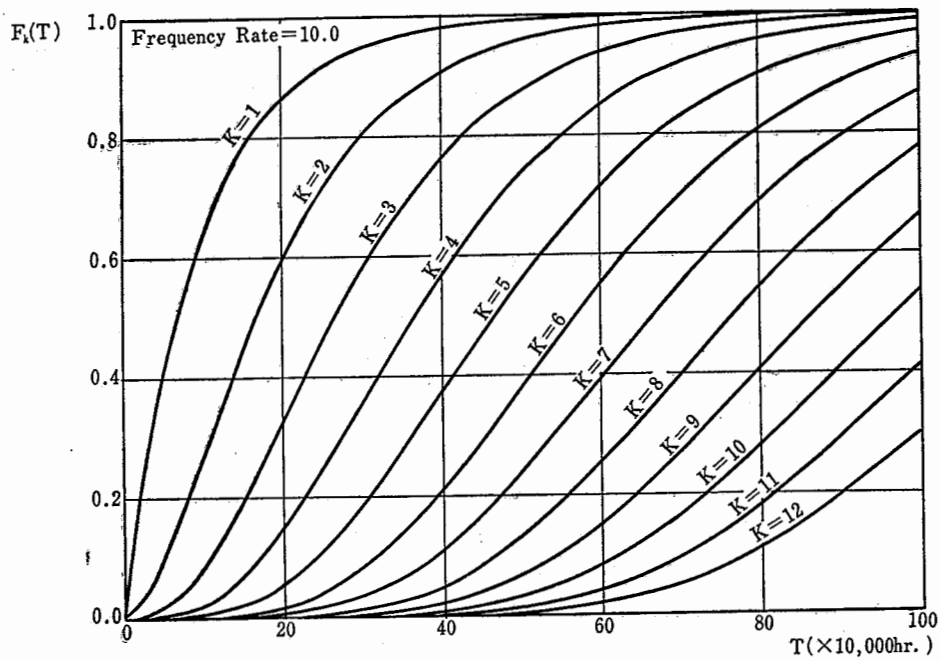

Fig. 6 Probability distribution function of Gamma distribution
(A=10.0, K=1～12 ; Equ. 5′)
ガンマ分布確率分布関数

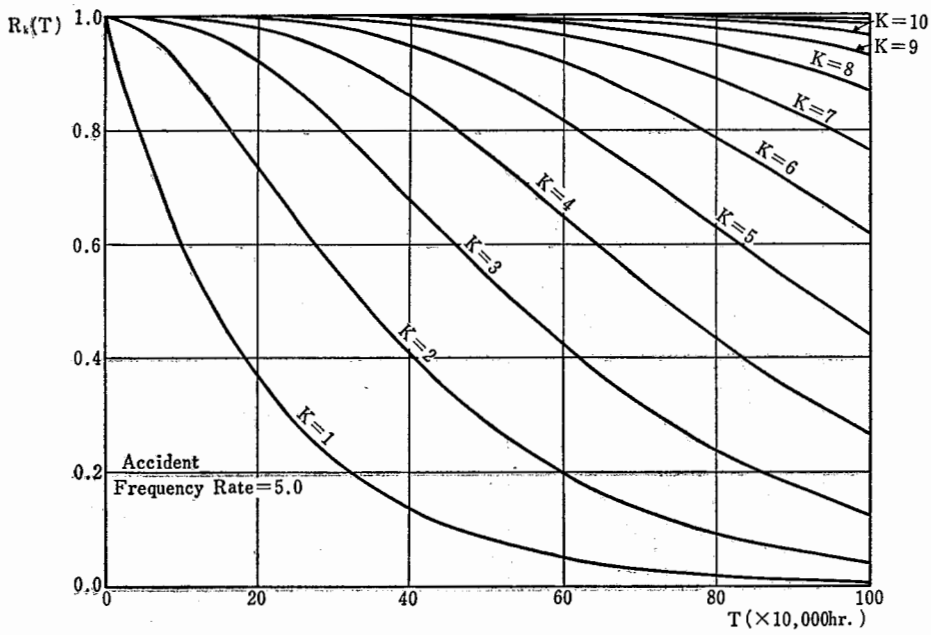

Fig. 7 Probability distribution function of Gamma distribution
(A=5.0, K=1～12 ; Equ. 6′)
ガンマ分布確率分布関数

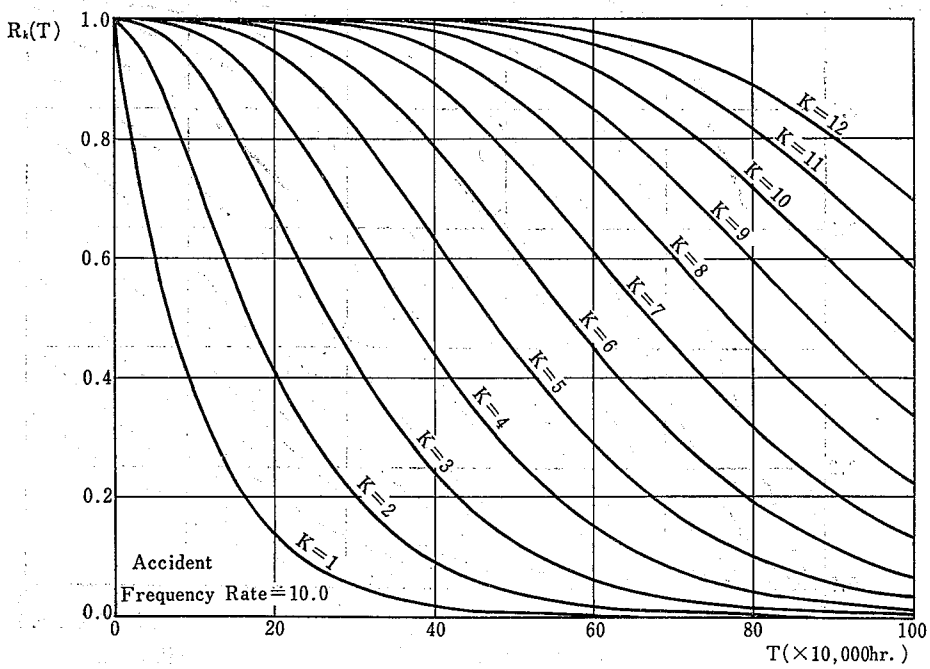

Fig. 8 Probability distribution function of Gamma distribution
(A=10.0, K=1～12 ; Equ. 6′)
ガンマ分布確率分布関数

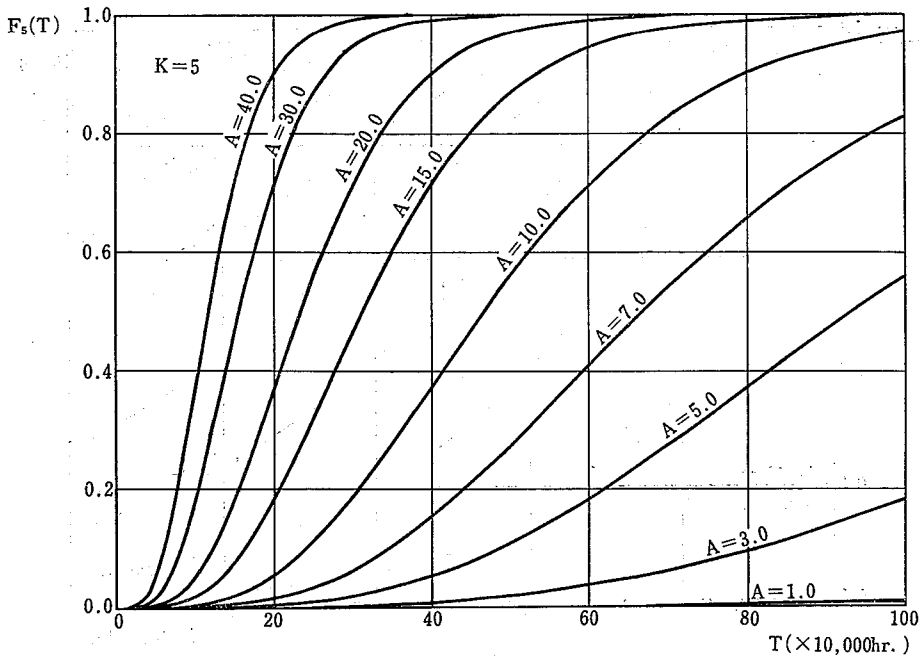

Fig. 9 Probability distribution function of Gamma distribution
(K=5, A=1.0～40.0 ; Equ., 5′)
ガンマ分布確率分布関数

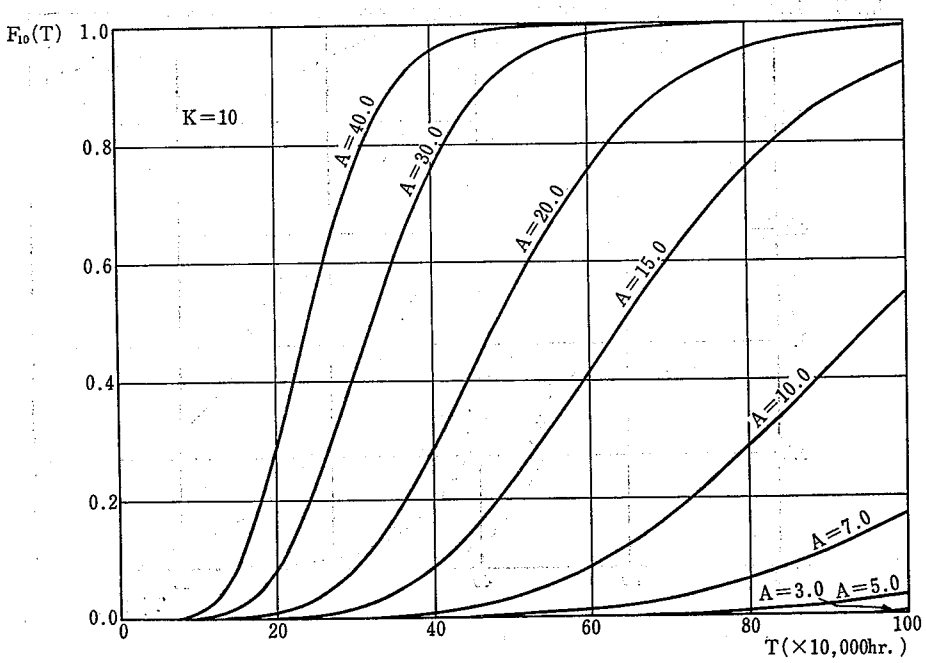

Fig. 10 Probability distribution function of Gamma distribution (K=10, A=1.0～40.0 ; Equ. 5′)
ガンマ分布確率分布関数

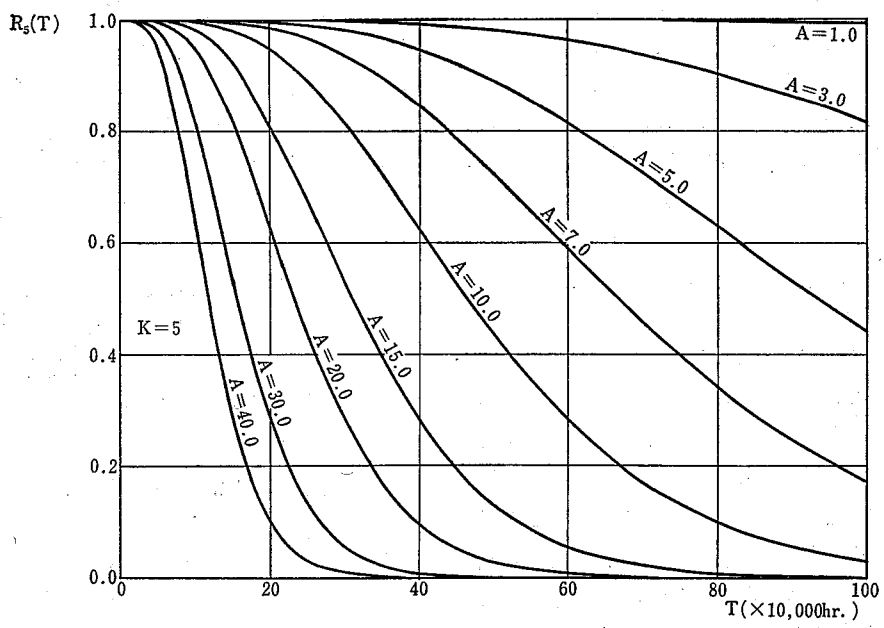

Fig. 11 Probability distribution function of Gamma distribution (K=5, A=1.0～40.0 ; Equ. 6′)
ガンマ分布確率分布関数

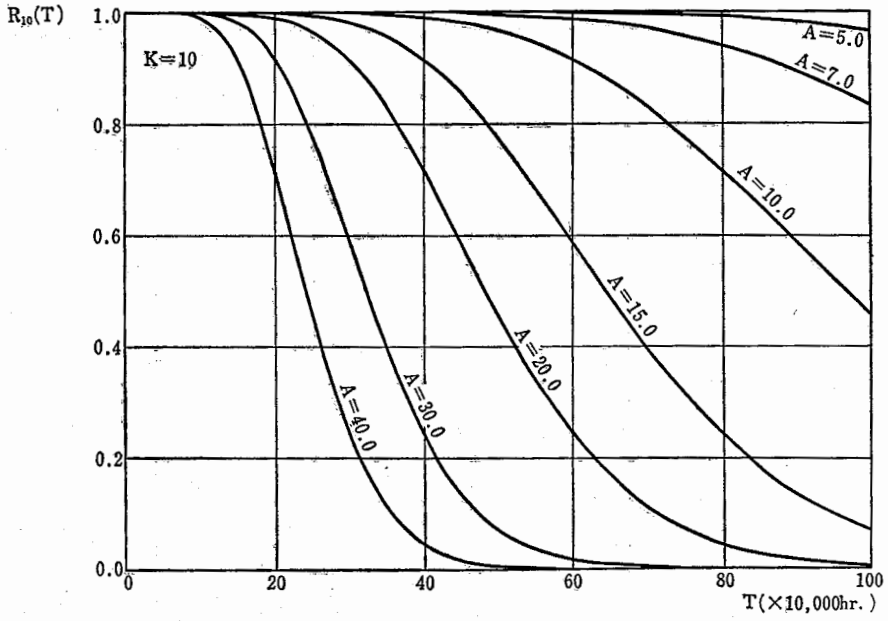

Fig. 12 Probability distribution function of Gamma distribution ($K=10$, $A=1.0\sim40.0$; Equ. 6′)
ガンマ分布確率分布関数

(Gamma distribution) と呼ばれ，(5)，(6)，(7) 式に (2) 式を代入し，$k=1$ とおくと指数分布である (3)，(4)，(1) 式になることが分かる。**Fig.** 4 には度数率 $A=20.0$ の時の，災害件数 $k=1\sim10$ に対する (7)′ 式による密度関数を示し，また **Fig.** 5, **Fig.** 6 には，$A=5.0$, $A=10.0$ と度数率を固定させた時の，$k=1\sim12$ に対する (5)′ 式による分布関数を示した。同じく k 個の災害発生が T 時間以上である確率を示す (6)′ 式による値を **Fig.** 7, **Fig.** 8 に示した。また逆に，災害発生件数を例えば $k=5$, $k=10$ と固定させ，度数率を種々に変化させた時の (5)′ 式による分布関数の値を **Fig.** 9, **Fig.** 10 に，同じく (6)′ 式による値を **Fig.** 11, **Fig.** 12 に示した。

これらの図に示される如く，任意の災害件数と度数率の組合せに対して，特定時間における災害発生確率，或いはその逆の発生しない確率は，それぞれ (5)′, (6)′ 式によって計算出来るが，安全管理の面からみると，前節の (4) 式が無災害であった時間の評価に有効であったように，複数個の災害が発生する時間の評価には，k 個の災害の発生時間が或る時間 T 以上である確率を与える (6)′ 式による評価が有効であると思われる。ここでは例として，$k=5$ および $k=10$ の場合の $R_k(T)$ と T と A の関係を調べ，前節の Fig. 3 と同様な形式でグラフ化したのが **Fig.** 13, **Fig.** 14 である。

2.3 複数個の集団全体の災害発生間隔の分布

1つの工場或いは工事現場などで，個々の災害または複数個の災害が発生する迄の時間の確率分布は既に検討されてきたが，本節では次の様な問題を考える。

n 個の独立した集団があり，それらの集団内ではそれぞれに災害が発生している時，集団全体としての災害発生間隔の分布はどのようになるであろうか？　これは例えば，或る事業所が幾つかの工場を有し，これらの工場が各々独立に災害を発生している時，事業所全体の災害発生間隔の分布を求めることと同等の問題である。但し，各集団（各工場など）は，それぞれ固有の災害発生頻度（度数率）を有しているものとする。(**Fig.** 15)

考え方としては，まず各集団の発生間隔の分布を，

$$f(t)=\lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad (i=1,\cdots,n)$$

とし，また或る時点を基準として，各集団が最初に災害を発生した時間をそれぞれ $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ とおく。この時 $T_{\min}=\min(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$ なる時間の分布，即ち n 個の集団内において発生した災害のうち，最も早く発生した災害の時間の分布を考える。

まず $n=2$ で，$\tau_1<\tau_2$ の場合

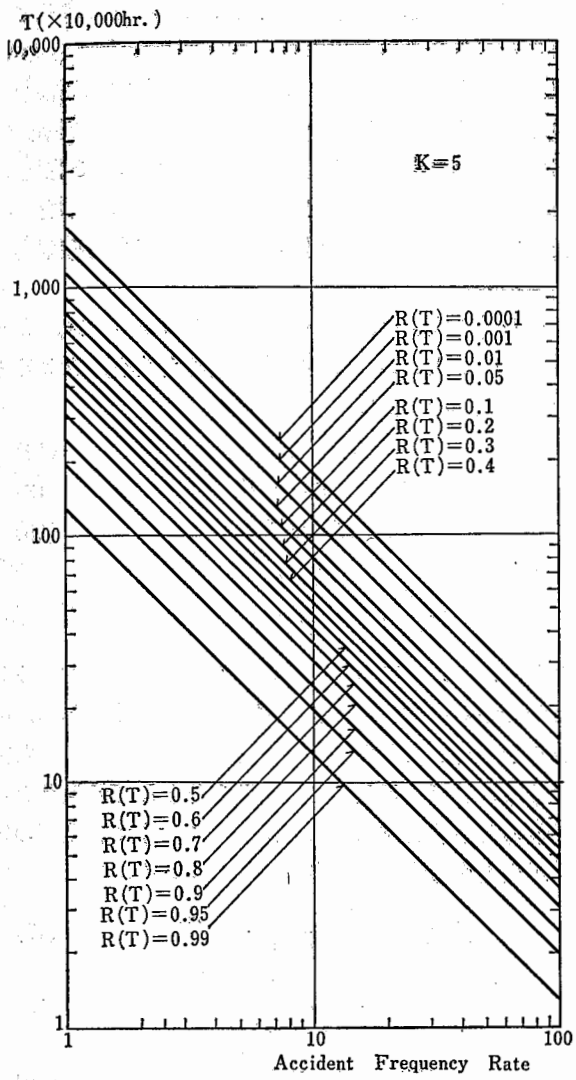

Fig. 13 Relation between $R_5(T)$, T, and A ($K=5$)
$R_5(T)\sim T\sim A$ の関係

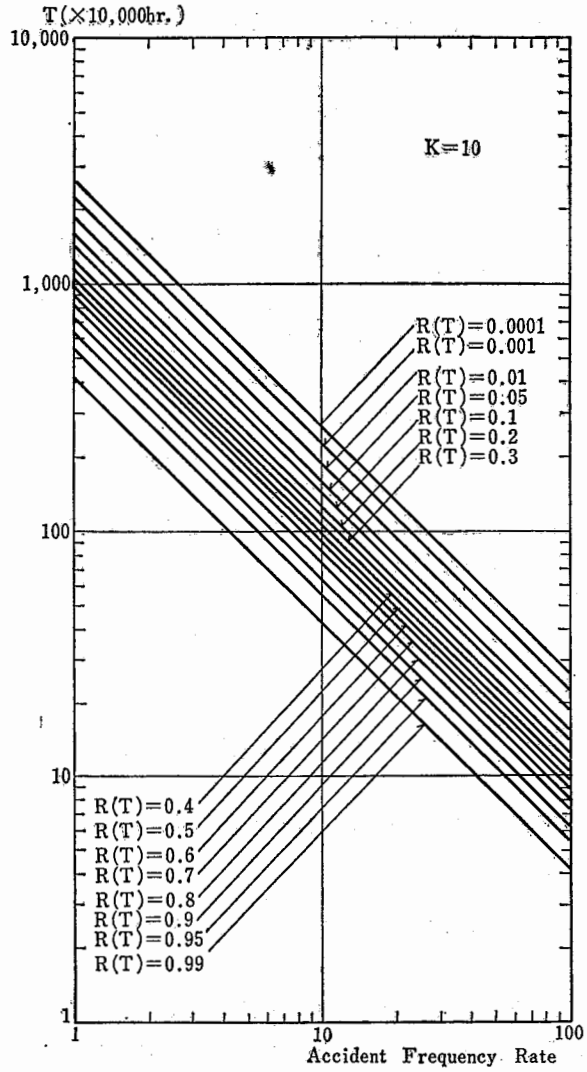

Fig. 14 Relation between $R_{10}(T)$, T, and A ($K=10$)
$R_{10}(T)\sim T\sim A$ の関係

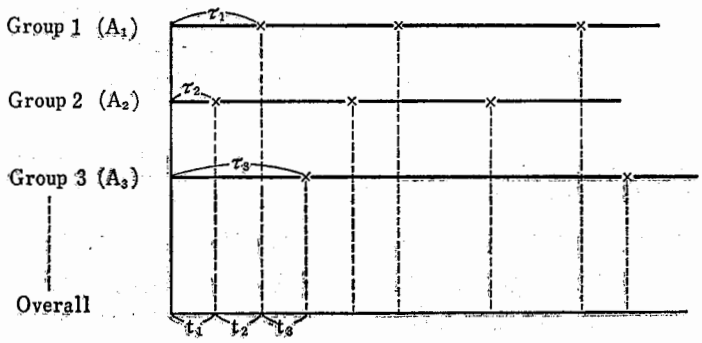

Fig. 15 Collective time intervals of n groups
幾つかの災害発生集団がある時の全体の災害発生間隔の分布

$$P_r(\tau_1>t\cap\tau_1<\tau_2)=\int_t^\infty\int_{\tau_1}^\infty\lambda_1\cdot\lambda_2 e^{-(\lambda_1\tau_1+\lambda_2\tau_2)}d\tau_2 d\tau_1$$

$$=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \qquad (8)$$

また $n=3$ で，$\tau_1<\tau_2<\tau_3$ の時は，

$$P_r(\tau_1>t\cap\tau_1<\tau_2<\tau_3)$$

$$=\int_t^\infty\int_{\tau_1}^\infty\int_{\tau_2}^\infty\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3 e^{-(\lambda_1\tau_1+\lambda_2\tau_2+\lambda_3\tau_3)}d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1$$

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_3(\lambda_3+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1)}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$$

同様にして $\tau_1<\tau_3<\tau_2$ の時は

$$P_r(\tau_1>t\cap\tau_1<\tau_3<\tau_2)$$

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_2(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1)}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$$

を得，以上を合計したものが，τ_1 を min とするときの確率分布となる。

$$P_r(\tau_1>t\cap\tau_1=T_{\min})$$

$$=P_r(\tau_1>t\cap\tau_1<\tau_2<\tau_3)+P_r(\tau_1>t\cap\tau_1<\tau_3<\tau_2)$$

よって，

$$P_r(\tau_1>t\cap\tau_1=T_{\min})=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} \qquad (9)$$

以下要するに，一般に集団が n 個の時，τ_j を min とする時の確率分は，

$$P_r(\tau_j>t\cap\tau_j=T_{\min})=\frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^n\lambda_i}e^{-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)t} \qquad (10)$$

min となることの出来る τ_j は全部で n 通りあるので，それらの値を総て加えると，$T_{\min}=\min(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$ の分布として，

$$P_r(T_{\min}>t)=R_{\min}(t)$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^n\lambda_j}{\sum_{i=1}^n\lambda_i}e^{-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)t}=e^{-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)t} \qquad (11)$$

よって，

$$P_r(T_{\min}<t)=F_{\min}(t)=1-e^{-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)t} \qquad (12)$$

確率密度関数は，

$$\frac{dF_{\min}(t)}{dt}=f_{\min}(t)=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)e^{-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)t} \qquad (13)$$

以上が，n 個の集団が独立に災害を発生した時の，全体としての最小の災害発生時間の確率分布を与えるものである。さて，n 個の集団内で，ある時間 t_1 (Fig. 15 参照）で最初の災害が発生したとして，次の災害が起こるまでの時間 t_2 の分布は，最初の災害が起こった時点を新しい基準の点と考えれば，上に述べてきたことがそのまま適用出来，以下同様な繰返しの結果，結局上記の各式は，n 個の集団が独立に災害を発生している時の，集団全体の災害発生間隔の確率分布式であることが分かる。(13) 式は密度関数であり，(12)式は或る時間 t までに災害が発生する確率を，また(11)式は災害発生時間が t 時間以上である確率を与えている。

また (2) 式より，個々の集団における λ_i は，$\lambda_i=A_i/100$（但し，A_i は集団 i の災害度数率）とおけるので，上記の各式は，

$$f_1'(t)=Se^{-St} \qquad (14)$$

$$F_1'(t)=1-e^{-St} \qquad (15)$$

$$R_1'(t)=e^{-St} \qquad (16)$$

但し　$S=\sum_{i=1}^n\lambda_i=\frac{\sum_{i=1}^n A_i}{100}$

となり，2.1 節における指数分布と全く同形であることが分かる。従って，各集団の度数率が分かれば，それらを合計して S を求め，S をパラメーターとした指数分布の計算を行なえば，集団全体としての災害発生間隔の確率値を求めることが出来る。また複数個の災害が発生する時間の分布に対しても前節同様に，

$$f'_k(T)=\frac{(ST)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot Se^{-ST} \qquad (17)$$

$$F'_k(T)=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(ST)^i}{i!}e^{-ST} \qquad (18)$$

$$R'_k(T)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(ST)^i}{i!}e^{-ST} \qquad (19)$$

が定義出来，確率分布の計算が行なえる。従って，前節までに用いたグラフ類は，そのまま本節の問題に対しても利用することが出来る。

以上本節で述べてきたことは，前述の複数の工場を持つ事業所の例のように，独立した幾つかの集団がある時，集団全体の災害発生状況を調べる時には，かなり有効な方法であると思われる。

3. 災害発生間隔と度数率の関係

既に述べたように，発生数の分布であるポアソン分布と，発生間隔の分布である指数分布とは表裏の関係にある。度数率とは，100 万労働時間当りの災害数で示される，いわば発生数の分布に関連した事柄である。ここでは，災害データーとして，災害件数とその

発生時間が与えられた時，これまでの災害発生間隔の分布の考え方を応用して，発生間隔とは裏腹の度数率を推定する方法について検討する。

まず簡単の為に，$k=1$ の場合，即ち最初の災害が発生した時点における度数率の推定法について考える。

$k=1$ の場合の災害発生時間分布の密度関数

$$f_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}$$

において，$\chi^2=2\lambda t$ と変数変換すると，$\lambda\cdot dt=1/2\cdot d\chi^2$ であるから，χ^2 の密度関数は，

$$f(\chi^2)=\frac{1}{2}e^{-\chi^2/2} \tag{20}$$

となり，(20)式は自由度 $\phi=2$ の χ^2 分布(Chi-square distribution) の密度関数であることが知られている。従って，

$$P_r(\chi_1^2<\chi^2<\chi_2^2)=\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} f(\chi^2)d\chi^2$$
$$=e^{-\chi_1^2/2}-e^{-\chi_2^2/2} \tag{21}$$

ここで t を固定し，$\chi_1^2=2\lambda_1 t$, $\chi_2^2=2\lambda_2 t$ とおくと，

$$P_r(2\lambda_1 t<2\lambda t<2\lambda_2 t)$$
$$=P_r(\lambda_1<\lambda<\lambda_2)=e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t} \tag{22}$$

よって，或る時間 t で災害が発生した時，その時点での度数率 A が，$A_1<A<A_2$ である確率は，

$$P_r(A_1<A<A_2/t)=e^{-(A_1/100)t}-e^{-(A_2/100)t} \tag{23}$$

となる。この関係は **Fig.** 16 に示される。

さてここで，事業所における度数率が事前に分かっていると仮定し，この度数率を基準度数率 A_c と定義する。災害が或る時間 t で発生した時，その時の度数率 (A') が $A<A'<A_c$, 即ち基準度数率 A_c と，それよりも小さな度数率 A との間にある確率は，

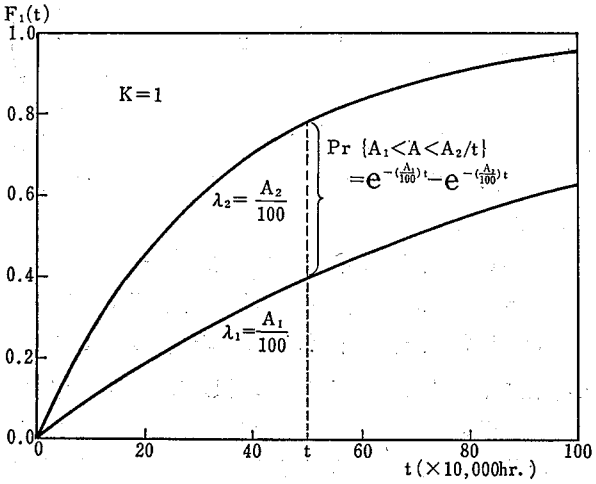

Fig. 16 Notional sketch of the probability of A between A_1 and A_2 $(K=1)$
時間 t で度数率が A_1 と A_2 との間にある確率

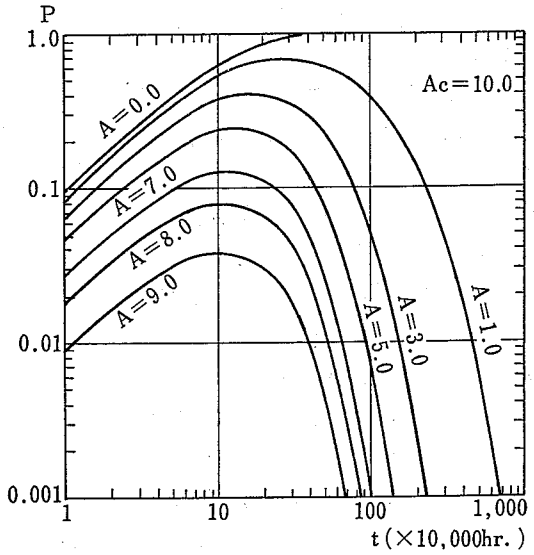

Fig. 17 Probability of frequency rate less than A_c
災害が t で発生した時，度数率が A_c と，A_c よりも小さい度数率 A との間にある確率

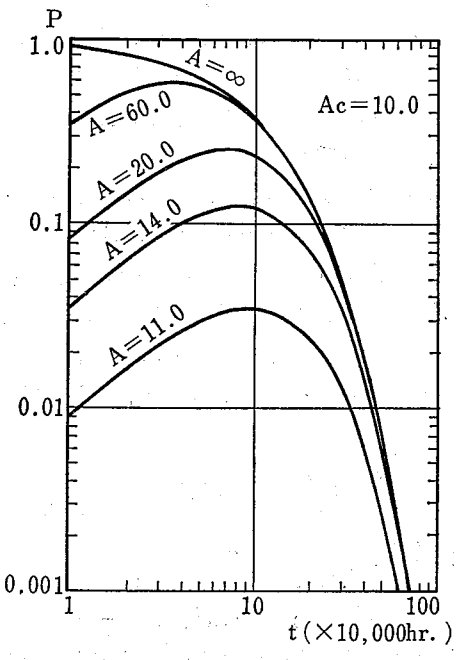

Fig. 18 Probability of frequency rate greater than A_c
災害が t で発生した時，度数率が A_c と，A_c よりも大きい度数率 A との間にある確率

$$P_r(A<A'<A_c/t)=e^{-(A/100)t}-e^{-(A_c/100)t} \qquad (24)$$

例えば基準度数率 $A_c=10.0$ として，A_c よりも小さな幾つかの度数率 A との間にある確率を，(24)式で調べた結果を **Fig.** 17 に示した。同図における $A=0.0$ の曲線は，度数率が $0<A'<A_c$ である確率，即ち A_c 以下である確率を示している。また $A=0.0$ 以外の各度数率は，発生時間の増加と共に，その確率値は増えているが，或る時間を超えると急激に減少していることが分かる。

また $A_c<A'<A$，即ち基準度数率 A_c と，それよりも大きな度数率 A との間にある確率は，

$$P_r(A_c<A'<A/t)=e^{-(A_c/100)t}-e^{-(A/100)t} \qquad (25)$$

前の例と同様に，基準度数率 $A_c=10.0$ として，A_c よりも大きな幾つかの度数率 A について，(25)式で求めた結果が **Fig.** 18 である。同図における $A=\infty$ の曲線は，度数率が $A_c<A'<\infty$ である確率，即ち A_c 以上である確率を与えている。同図同様各度数率とも発生時間が長くなるに従い，確率値は増えているが，或る時間を過ぎると急激に減少している。また発生時間 t が 60 万時間以上であると，$A_c=10.0$ よりも大きな度数率である確率は，殆ど 0 に等しく，これは Fig. 17 について，$A=0$ の曲線，つまり $A_c=10.0$ 以下である確率が，ほぼ 1 に等しいことと同等である。以上は，事業所での度数率 (A_c) が，先験的に分かっている場合に，災害発生時間を知ることによって，A_c よりも大きい，または小さい度数率である確率が与えられる例である。

A_c が未知で災害発生時間が与えられた時，一般的には，或る信頼水準 (Confidence level) に基づいた度数率の区間推定 (Interval estimation) を行なう。前述の χ^2 分布を利用し，信頼水準を $(1-\alpha)$ とすると，χ^2 分布表から自由度 $\phi=2$ について，$\chi^2(2\,;1-\alpha/2)$ と $\chi^2(2\,;\alpha/2)$ なる点を，以下によって与えられる点を選ぶと，

$$\chi^2\left(2\,;1-\frac{\alpha}{2}\right):\int_{\chi^2_{1-(\alpha/2)}}^{\infty}f(\chi^2)\,d\chi^2=1-\frac{\alpha}{2}^{*}$$

$$\chi^2\left(2\,;\frac{\alpha}{2}\right):\int_{\chi^2_{(\alpha/2)}}^{\infty}f(\chi^2)\,d\chi^2=\frac{\alpha}{2}$$

$$P_r(\chi^2_{1-(\alpha/2)}<\chi^2<\chi^2_{\alpha/2})=1-\alpha$$

なることより，λ の上限値 (Upper limit)，および下限値 (Lower limit) よりなる信頼区間が，

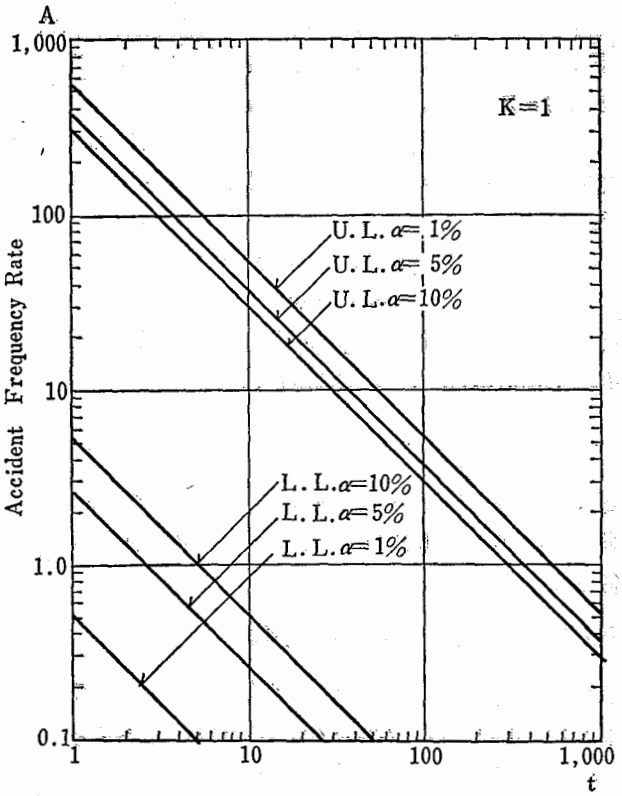

Fig. 19　Interval estimation of frequency rate ($K=1$)
度数率の信頼区間の推定

$$(\lambda_{LL},\lambda_{UL})=\left(\frac{\chi^2\left(2\,;1-\frac{\alpha}{2}\right)}{2t},\ \frac{\chi^2\left(2\,;\frac{\alpha}{2}\right)}{2t}\right) \qquad (25)$$

で与えられる。同様に度数率に対しても，

$$(A_{LL},A_{UL})=\left(\frac{50\cdot\chi^2\left(2\,;1-\frac{\alpha}{2}\right)}{t},\ \frac{50\cdot\chi^2\left(2\,;\frac{\alpha}{2}\right)}{t}\right) \qquad (26)$$

が信頼水準 $(1-\alpha)$ に対する信頼区間として与えられる。例えば危険率 $\alpha=10,5,1\%$ の時，$\phi=2$ に対して数表[3] より，

$\alpha=10\%$　$\chi^2_{1-(\alpha/2)}=0.1026$　$\chi^2_{\alpha/2}=5.9915$
$\alpha=5\%$　$\chi^2_{1-(\alpha/2)}=0.05064$　$\chi^2_{\alpha/2}=7.3777$
$\alpha=1\%$　$\chi^2_{1-(\alpha/2)}=0.01003$　$\chi^2_{\alpha/2}=10.5966$

が与えられ，上記の各危険率に対して，災害発生時間 $t=1\sim1,000$ 万時間までの度数率の信頼区間を求めたのが **Fig.** 19 である。同図より，例えば 10 万時間で災害が起こった時，$\alpha=10\%$ に対する度数率の信頼区間が，$0.51<A<30.0$ で与えられる。

次に一般的な場合として，k 件の災害が T 時間で発生した場合の，度数率の区間推定について検討する。

---

* $f(\chi^2)$ は χ^2 分布の密度関数であり，その一般式は(30)式の通りである。

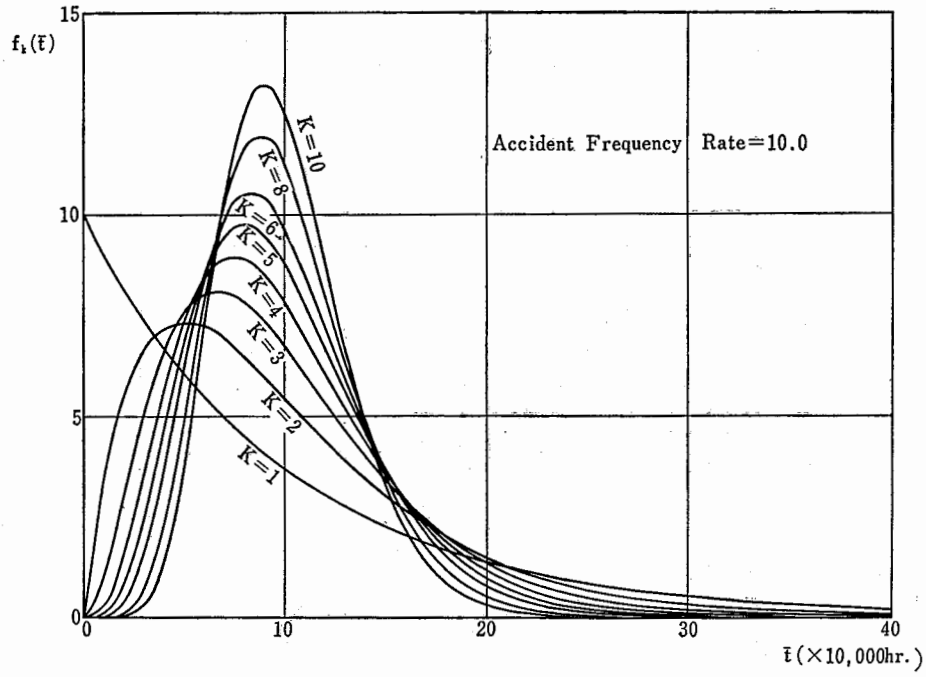

Fig. 20 Probability density function of Erlang distribution
(A=10.0, K=1～10 ; Equ. 29′)
アーラン分布の確率密度関数

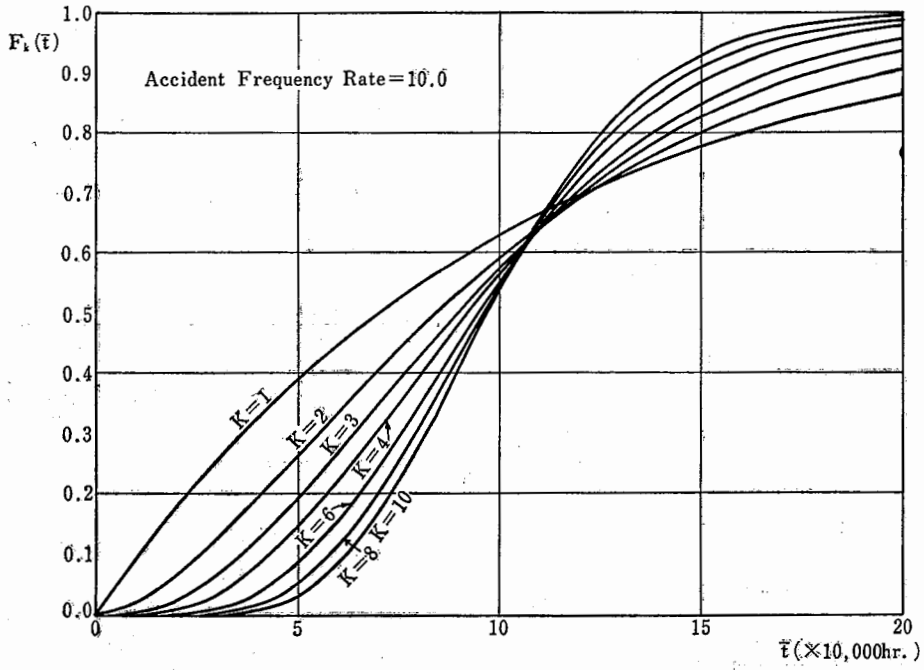

Fig. 21 Probability distribution function of Erlang distribution
(A=10.0, K=1～10 ; Equ. 27′)
アーラン分布の確率分布関数

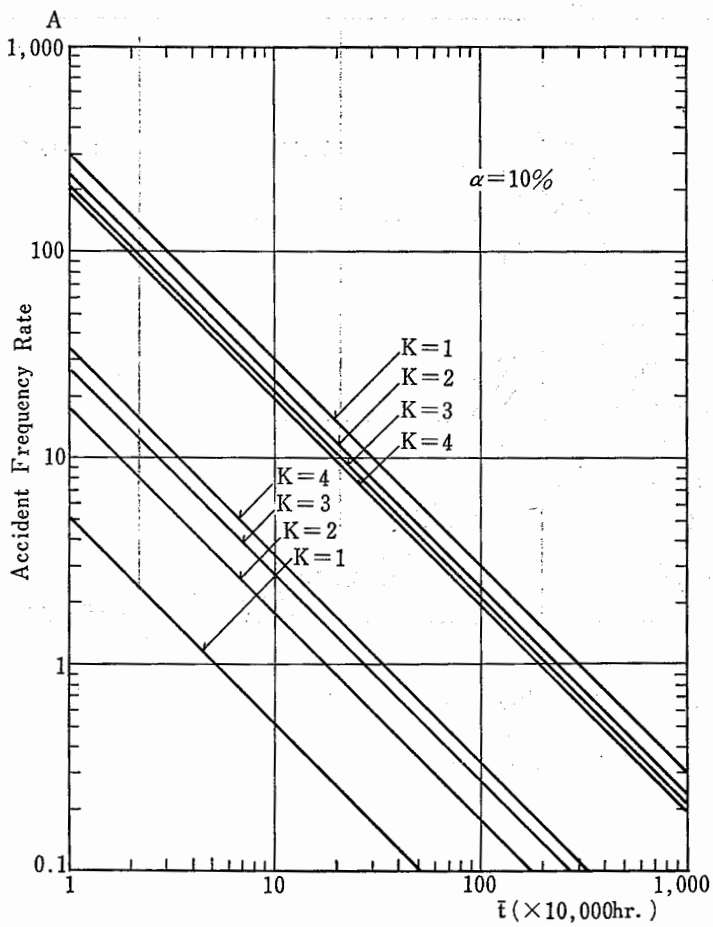

Fig. 22 Interval estimation of frequency rate
($\alpha=10\%$, $K=1\sim4$)
度数率の信頼区間の推定

ここで先ず，災害1件当りの発生時間（平均災害発生時間数）の分布を求める。k 番目の災害までのそれぞれの発生間隔を $t_1, t_2, \cdots, t_k$ とし，$T=t_1+t_2+\cdots+t_k$ より $\bar{t}=T/k$ が或る値 $\bar{t}$ よりも小さい確率は，t_i の分布が，$f(t_i)=\lambda e^{-\lambda t_i}$ として，

$$P_r(\bar{t}<\bar{t})=P_r(T<k\bar{t})=F_k(\bar{t})$$

$$=\int_0^{k\bar{t}}\int_0^{k\bar{t}-t_1}\cdots\int^{k\bar{t}-t_1-\cdots-t_{k-1}}\lambda^k e^{-\lambda(t_1+t_2+\cdots+t_k)}dt_k dt_{k-1}\cdots dt_2 dt_1$$

$$=-\frac{(k\lambda\bar{t})^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\lambda\bar{t}}+\int_0^{k\bar{t}}\int_0^{k\bar{t}-t_1}\cdots$$

$$\int_0^{k\bar{t}-t_1-\cdots-t_{k-2}}\lambda^{k-1}e^{-\lambda(t_1+t_2+\cdots+t_{k-1})}dt_{k-1}dt_{k-2}\cdots dt_1$$

$$=-\frac{(k\lambda\bar{t})^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\lambda\bar{t}}-\frac{(k\lambda\bar{t})^{k-2}}{(k-1)!}e^{-k\lambda\bar{t}}$$

$$+\int_0^{k\bar{t}}\int_0^{k\bar{t}-t_1}\cdots\cdots$$

$$\int_0^{k\bar{t}-t_1-\cdots-t_{k-3}}\lambda^{k-2}e^{-\lambda(t_1+t_2+\cdots+t_{k-2})}dt_{k-2}\cdots dt_1$$

$$\vdots$$

$$=-\frac{(k\lambda\bar{t})^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\lambda\bar{t}}-\frac{(k\lambda\bar{t})^{k-2}}{(k-2)!}e^{-k\lambda\bar{t}}-\cdots$$

$$-\frac{(k\lambda\bar{t})^2}{2!}e^{-k\lambda\bar{t}}-(k\lambda\bar{t})e^{-k\lambda\bar{t}}+\int_0^{k\bar{t}}\lambda e^{-\lambda t_1}dt_1$$

$$=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k\lambda\bar{t})^i}{i!}e^{-k\lambda\bar{t}} \tag{27}$$

$$=1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(k\cdot\frac{A}{100}\bar{t}\right)^i}{i!}e^{-k(A/100)\bar{t}} \tag{27'}$$

平均災害発生時間が $\bar{t}$ よりも大きい確率は，

$$R_k(\bar{t})=1-F_k(\bar{t})=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k\lambda\bar{t})^i}{i!}e^{-k\lambda\bar{t}} \tag{28}$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\left(k\cdot\frac{A}{100}\bar{t}\right)^i}{i!}e^{-k(A/100)\bar{t}} \tag{28'}$$

また確率密度関数として，

$$f_k(\bar{t})=\frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!}\bar{t}^{k-1}e^{-k\lambda\bar{t}} \qquad (29)$$

$$=\frac{\left(\frac{k\cdot A}{100}\right)^k}{(k-1)!}\bar{t}^{k-1}e^{k(A/100)\bar{t}} \qquad (29)'$$

$$E_k(\bar{t})=\frac{1}{\lambda},\quad V_k(\bar{t})=\frac{1}{k\lambda^2}$$

上式は位相 k のアーラン分布 (Erlang distribution) と呼ばれ，待ち行列理論などで良く使われる分布である。**Fig.** 20 にはアーラン分布の密度関数を，また **Fig.** 21 には度数率 $A=10.0$ の時の分布関数を示した。両図には，災害発生件数 k が多くなるに従い，分布は平均値 $1/\lambda$ または $100/A$ に漸近してゆく様子が示されている。

さて，$\bar{t}$ は逆数ではあるが度数率の推定値でもあるので ($A=k/T\times100=1/\bar{t}\times100$)，アーラン分布からも度数率の確率分布の計算が可能であるが，ここでは $k=1$ の時と同様に，χ^2 分布を利用することを考える。

(29)式において $\chi^2=2k\lambda\bar{t}$ とおくと同式は，

$$f_k(\chi^2)=\frac{\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{(2k/2)-1}}{2(k-1)!}e^{-\chi^2/2} \qquad (30)$$

となり，これは自由度 $\phi=2k$ の χ^2 分布の確率密度関数であり，$k=1$ とおくと(20)式となる。従って，前例同様信頼水準 $(1-\alpha)$ として，χ^2 分布表より $\phi=2k$ に対する $\chi^2(2k\,;1-\alpha/2)$，$\chi^2(2k\,;\alpha/2)$ なる値を調べると，λ および A に対する信頼区間が，それぞれ次式で与えられる。

$$(\lambda_{LL},\lambda_{UL})=\left(\frac{\chi^2(2k\,;1-\alpha/2)}{2k\bar{t}},\ \frac{\chi^2(2k\,;\alpha/2)}{2k\bar{t}}\right) \qquad (31)$$

$$(A_{LL},A_{UL})=\left(\frac{50\chi^2(2k\,;1-\alpha/2)}{k\bar{t}},\ \frac{50\chi^2(2k\,;\alpha/2)}{k\bar{t}}\right) \qquad (32)$$

一例として，危険率 $\alpha=10\%$ とすると，

$k=1$ $\phi=2$ $\chi^2{}_{1-(\alpha/2)}=0.1026$ $\chi^2{}_{(\alpha/2)}=5.9915$

$k=2$ $\phi=4$ $\chi^2{}_{1-(\alpha/2)}=0.7107$ $\chi^2{}_{(\alpha/2)}=9.4877$

$k=3$ $\phi=6$ $\chi^2{}_{1-(\alpha/2)}=1.6354$ $\chi^2{}_{(\alpha/2)}=12.5916$

$k=4$ $\phi=8$ $\chi^2{}_{1-(\alpha/2)}=2.7326$ $\chi^2{}_{(\alpha/2)}=15.5073$

が χ^2 分布表から得られ，$\bar{t}=1\sim1,000$ 万時間に対する度数率の信頼区間を求めたのが **Fig.** 22 である。同図より災害件数 k が多くなる程，災害に関する情報も増えるので，度数率の信頼区間の巾が狭くなっていることが分かる。また同図は，危険率 $\alpha=10\%$ に対する信頼区間を与えているが，他の危険率に対するグラフも同様にして作図出来，災害発生件数と，平均災害発生時間が分かれば，所定の信頼水準に基づいた度数率の区間推定を図上で行なうことが出来る。

4. 結　　語

これまで，災害がランダムな事象であるとして，幾つかの観点から発生時間の分布について考察を行なってきたが，その結果以下の結論が得られた。

1) 災害の発生がランダムな場合，一定期間中の発生数の分布はポアソン分布に，また発生間隔の分布は指数分布に従う。指数分布のパラメーター λ を度数率から推定し，或る特定時間内で災害が発生する確率や (Fig. 1)，発生しない確率 (Fig. 2) を，各度数率ごとに求めることが出来る。逆に，或る達成確率(危険率)に基づいた度数率と，災害発生間隔との関係も求めることが出来 (Fig. 3)，同図あるいは数表より，事業所等での安全管理上の，1つの目安としての無災害時間数を設定することが出来る。

2) 複数個の災害が発生する時間の分布は，指数分布の和の分布であるガンマ分布で示され (Fig. 4)，任意の災害件数，度数率について，特定時間内で災害が発生する確率，或いはその逆の発生しない確率を求めることが出来る。(Fig. 5～12) また複数災害件数の特定発生確率に対して，災害発生時間と度数率との関係についても論ずることが出来る。(Fig. 13, 14)

3) 災害を発生する集団が幾つかあり，各集団ごとに独立に災害が発生している時 (Fig. 15)，全体としての災害発生間隔の分布は，個々の集団の災害度数率を合計した度数率をパラメーターとした指数分布となる。同じく複数個の災害発生時間分布も，合計された度数率をパラメーターとしたガンマ分布となる。これらの分布の確率値については，1), 2) での結果を，そのまま適用することが出来る。

4) k 件の災害が T 万時間で発生した時，平均災害発生間隔 $\bar{t}$ はアーラン分布となる。(Fig. 20, 21) 災害に関する情報として，災害発生件数と発生時間が与えられた時，アーラン分布を変数変換により χ^2 分布に置き換えることによって，χ^2 分布表より簡単に度数率の信頼区間を求めることが出来る。(Fig. 19, 22)

また度数率が既知の場合，その度数率（A_c）よりも大きい，或いは小さい度数率との間である確率も，計算することが出来る。(Fig. 17, 18)

これまでの安全水準の評価法は，通常1年間の災害発生数を，100 万労働時間当りに換算した年度数率を以てその年を評価するように，或る期間を結果として評価する方法であった。今回取り上げた災害発生間隔による評価法は，起こった，起こらなかった，ことを結果的に評価する点では変りは無いが，災害が発生した時点の他，どの時点においてもその評価が可能であり，度数率が或る期間の発生数を集計して評価しなければならない欠点を補っているのみならず，その時点までの災害情報を利用して，度数率の信頼区間の推定を行なうことが出来る利点も持っている。しかしながら，このことは度数率よりも，災害発生間隔による評価法の方が良いと言う意味では無く，評価の対象と目的によって，その使用法が異なると言うことである。例えば，事業所での年単位の安全水準評価には度数率の方が便利であろうし，一方事業所における日常的なさまざまな災害要因，危険性の変化（労働力，作業環境・条件の変化，その他）を，より早く評価するには，災害発生間隔による方法が有効であると思われる。

なお本研究において行なった一連の計算は，当研究所電子計算機 FACOM 230-35 を用いて行なったことを付記すると共に，最後に，数多くのグラフ，数表の作製，整理に当って御協力を頂いた熱田雄造君に対し，感謝の意を表します。

（昭和 52 年 9 月 16 日受理）

参　考　文　献

1) B. A. Maguire, E. S. Pearson, A. H. A. Wynn : Biometrika 39, 168 (1952)
2) 花安繁郎：産業安全研究所技術資料 TN-76-2, 1976
3) 統計数値表 JSA-1972 日本規格協会，1977

産業安全研究所研究報告　RIIS-RR-26-3

昭和52年11月20日　発行

発行所　労働省産業安全研究所
〒108　東京都港区芝5丁目35番1号
電話 (03) 453—8441(代)
印刷所　新日本印刷株式会社

UDC 614.8-02

災害発生間隔の分布に関する研究

花安繁郎

産業安全研究所研究報告　RIIS-RR-26-3, 1～18 (1977)

災害発生間隔の分布を安全管理に応用する目的で，幾つかの観点から，発生時間分布の考察を行なった。

災害がランダムな事象であれば，発生間隔の分布は指数分布に，また複数個の災害が発生する時間の分布はガンマ分布となる。これらの分布のパラメーターを，度数率から推定することにより，災害度数率と発生時間とを関係づけることが出来た。また幾つかの集団が独立に災害を発生している時，集団全体としての発生間隔の分布は，個々の集団の度数率を合計した度数率をパラメーターとした指数分布となることを示し，更に災害件数と発生時間を知ることによって，度数率の区間推定を行なう方法について検討した。

(図 22, 参 3)

UDC 614.8-02

A Study on the Time Intervals between Industrial Accidents

by Shigeo HANAYASU

Research Report of the Research Institute of Industrial Safety

RIIS-RR-26-3, 1～18 (1977)

In the hope of establishing the usefulness of the time intervals between industrial accidents as a measurement of safety performance and calculating the probability whether the accidents will occur or not at a particular time T for one industrial place having a certain accident risk, various kinds of time intervals were studied.

As conclusions, the time intervals between accidents would be useful as a measurement of safety performance. They can be used especially as an earlier indication of changes of the accident situation. Interval estimation of accident frequency rate using time intervals would be very useful for safety management.

(22 Figures, 3 References)